

Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Progetto numerico al calcolatore

Parte III

Discretizzazione di un dominio piano: il software MeshMaker

Indice

1	Griglie di calcolo ad elementi finiti	1
1.1	Triangolazioni di Delaunay	2
2	Il software MeshMaker	4
2.1	Definizione del dominio di integrazione	5
2.2	Generazione della mesh triangolare	7
2.3	Esportazione della topologia della griglia	13

1 Griglie di calcolo ad elementi finiti

Il modello matematico di un qualsiasi problema ingegneristico corrisponde a calcolare in un determinato dominio Ω l'andamento di una funzione di interesse, generalmente a più variabili, che soddisfi un'equazione differenziale alle derivate parziali (PDE). Ad esempio, in problemi di flusso sotterraneo si vuole determinare l'andamento del potenziale idraulico di un acquifero nota la ricarica a monte e l'estrazione nel tempo effettuata a valle. Ciò si riconduce alla ricerca della funzione Φ soluzione, nello spazio e nel tempo, dell'equazione differenziale della diffusione nei mezzi porosi:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(T_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = S_s(x, y, z) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + f(x, y, z, t) \quad (1)$$

in cui T_x, T_y, T_z, S_s sono degli opportuni parametri (trasmissività e immagazzinamento) del sotto-suolo, variabili nello spazio, ed f una forzante che definisce la ricarica e le estrazioni nello spazio e nel tempo. Il dominio Ω su cui va risolta l'equazione (1) sarà quello dell'acquifero in esame. Casi analoghi si possono trovare in altri settori dell'ingegneria, come ad esempio in problemi di ricerca dell'equilibrio elastico di una determinata struttura, come una piastra o una membrana, in cui il volume di integrazione coincide con quello del corpo da esaminare e le funzioni incognite sono gli spostamenti e le tensioni lungo le direzioni coordinate.

Dall'analisi matematica è noto che la soluzione a tali problemi si può ricavare in forma chiusa solo in particolari circostanze di simmetria ed uniformità del dominio Ω che praticamente mai vengono soddisfatte nella realtà. Il metodo degli elementi finiti permette di determinare una soluzione approssimata all'equazione differenziale in esame in un dominio qualsiasi, calcolando una funzione discreta anziché continua della quale vengono forniti i valori solamente in determinati punti. Tali punti sono chiamati i *nodi* della griglia di calcolo. La soluzione discreta dell'equazione differenziale è calcolata in volumi elementari definiti da gruppi di nodi adiacenti, che costituiscono gli *elementi finiti*. La contemporanea soluzione in tutti i volumi elementari in cui si suddivide il dominio imponendo opportune condizioni di congruenza sugli elementi adiacenti costituisce il risultato del modello numerico.

Da quanto accennato appare evidente l'importanza di discretizzare adeguatamente il dominio di integrazione per ottenere una soluzione il più possibile vicina alle nostre specifiche esigenze progettuali. Ad esempio, in un problema strutturale sarà necessario addensare i nodi della griglia, e quindi raffinare gli elementi finiti della mesh di calcolo, soprattutto in prossimità delle zone in cui si prevede una maggiore sollecitazione, così come in un problema di flusso risulterà importante aumentare la quantità di nodi soprattutto laddove si prevede una rapida variazione del gradiente idraulico, cioè in prossimità di pozzi o di sorgenti. In Figura 1 sono riportati due esempi di mesh ad elementi finiti (2-D e 3-D) realizzate in reali applicazioni di ingegneria, da cui si può osservare la forte disomogeneità nella distribuzione dei nodi e degli elementi richiesta dallo specifico problema in esame.

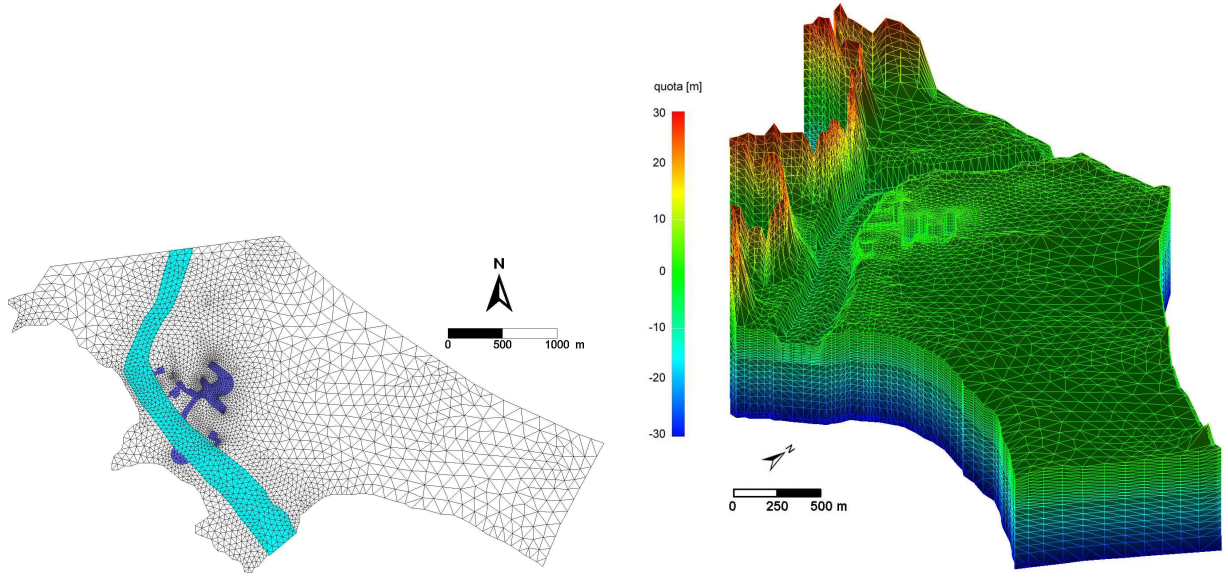


FIGURA 1: *Esempi di discretizzazioni 2-D e 3-D per la soluzione di problemi geomeccanici e fluidodinamici nel sottosuolo e per la previsione del trasporto superficiale in un corso d'acqua con bacini artificiali.*

Esistono svariati tipi di elementi che possono essere utilizzati per discretizzare nel modo più appropriato il dominio di interesse. La scelta dell'elemento più adeguato dipende sostanzialmente dallo specifico problema e dalle caratteristiche della soluzione cercata. La presente nota si concentra, in particolare, sulla costruzione di griglie di calcolo ad elementi finiti triangolari a 3 nodi su domini piani di forma generica. Come si vedrà meglio in seguito, tali elementi consentono una approssimazione lineare della funzione incognita sull'elemento.

1.1 Triangolazioni di Delaunay

La forma degli elementi che discretizzano il dominio di integrazione è di fondamentale importanza per la bontà del risultato ottenuto. Si può infatti dimostrare per via teorica che la convergenza della soluzione approssimata alla soluzione vera di un problema è tanto migliore quanto più la griglia di calcolo è regolare, nel senso che gli angoli interni di elementi adiacenti risultano prossimi fra di loro.

La Figura 2 riporta due esempi di elementi triangolari adiacenti. Nel primo caso la mesh risultante è regolare, mentre nel secondo la presenza di angoli ottusi provoca una notevole irregolarità nello schema. È buona norma nella triangolazione di un dominio piano seguire la seguente condizione sugli angoli α e δ di Figura 2:

$$\alpha + \delta < \pi \quad (2)$$

In altre parole, si cerca di soddisfare la condizione che la somma di angoli opposti ad un lato in

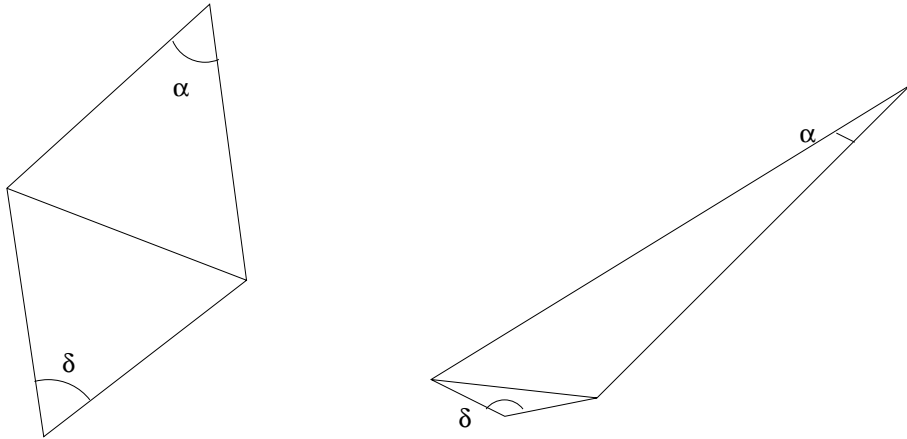


FIGURA 2: Esempi di triangolazione regolare ed irregolare.

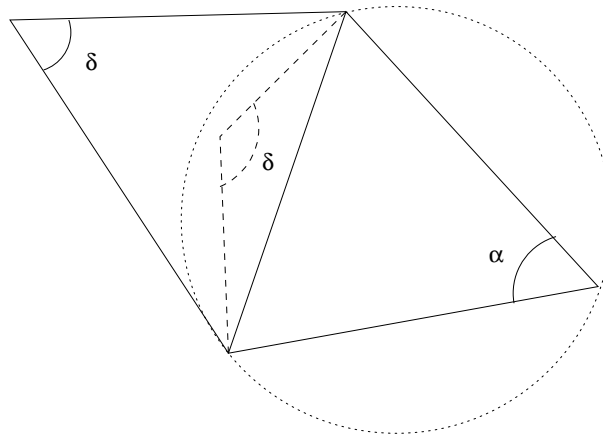


FIGURA 3: Interpretazione geometrica della condizione di Delaunay.

comune fra triangoli adiacenti sia minore di un angolo piatto. Da un punto di vista geometrico, la condizione (2) impone che, considerato il cerchio circoscritto ad ogni elemento triangolare, nessun altro nodo oltre a quelli dell'elemento in esame cada al suo interno (Figura 3). Qualora la condizione (2) sia verificata per tutti gli elementi triangolari con i quali è stato discretizzato il dominio di interesse, si dice che la griglia è una *triangolazione di Delaunay*. Realizzare una triangolazione di Delaunay è condizione necessaria per assicurare un migliore condizionamento alla matrice del sistema finale e per ottenere una buona convergenza alla soluzione vera. Con mesh irregolari, invece, la soluzione numerica può presentare oscillazioni incontrollate e manifestare segni di instabilità.

Ottenere una triangolazione di Delaunay in un dominio qualsiasi può essere un'operazione estremamente complessa. Per tale motivo, è fondamentale utilizzare uno strumento di calcolo automatico rigoroso ed efficiente. Fra i vari codici in commercio, si è scelto di adottare il software MeshMaker sviluppato e rilasciato dalla società internazionale Argus One.

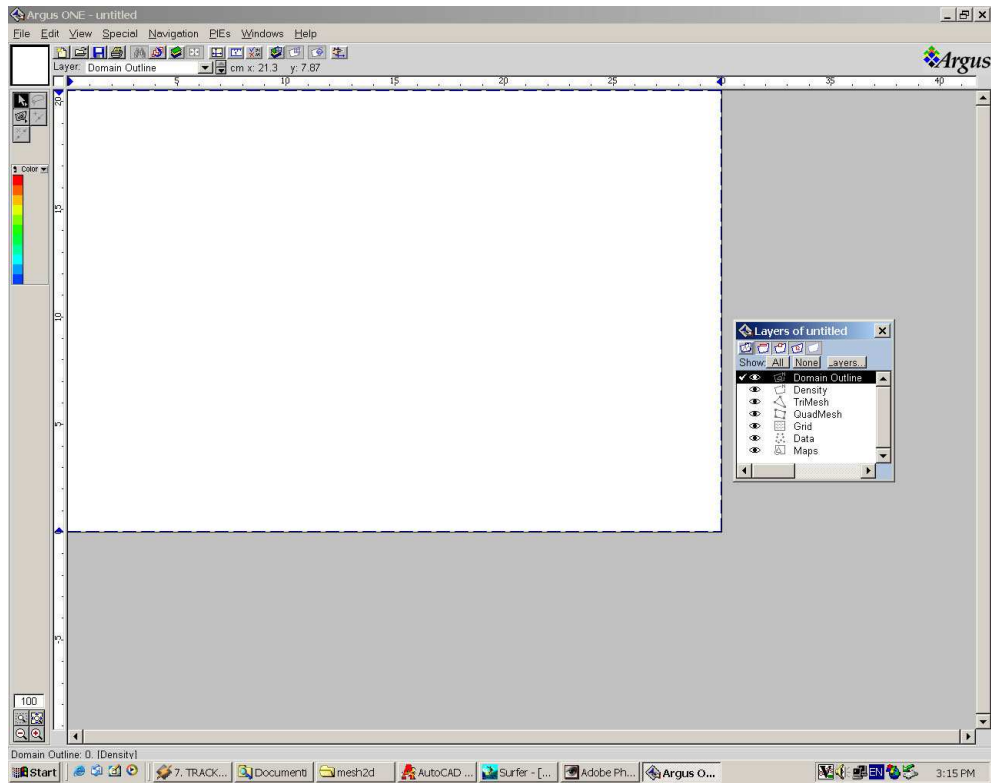


FIGURA 4: *Tipica finestra su un progetto vuoto di MeshMaker.*

2 Il software MeshMaker

MeshMaker Pro della Argus One è un pacchetto software che consente di generare automaticamente triangolazioni di Delaunay su domini qualsiasi e di esportare con un formato ASCII definito dall'utente le informazioni correlate alla griglia di calcolo. Oltre a mesh triangolari, MeshMaker consente inoltre di creare mesh con elementi quadrangolari e griglie alle differenze finite. Tali moduli, tuttavia, non verranno per il momento considerati in quanto al di fuori degli scopi della presente nota.

Il sistema operativo su cui MeshMaker viene installato può essere Microsoft Windows, Macintosh oppure Linux/Unix, con lievi differenze di grafica da un caso all'altro. Nel seguito ci riferiremo all'aspetto assunto in un sistema operativo Windows. La Figura 4 illustra come tipicamente appare la finestra in cui viene eseguito il programma non appena invocato dall'utente dal menu Start. Come si osserva dalla finestra di dialogo **Layers of Untitled**, il programma di default crea nel progetto vuoto denominato "Untitled" una sequenza di 7 layers distinti su ciascuno dei quali possiamo caricare determinati oggetti ed eseguire determinate operazioni. In generale i layers di MeshMaker sono di 3 tipi:

1. *Mesh and Grid type layers*: contengono le griglie agli elementi finiti o alle differenze finite. Di

default, i layers **Trimesh** e **Quadmesh** possono contenere mesh triangolari e quadrangolari agli elementi finiti, rispettivamente, mentre il layer **Grid** può contenere una griglia alle differenze finite;

2. *Information and Data type layers*: in generale, contengono una griglia di dati ed informazioni distribuita nell'area di interesse. In essi si possono anche caricare file grafici in formato DXF che vengono tradotti in linee e punti selezionabili e modificabili singolarmente. Di default, sono layers di questo tipo il **Domain Outline**, contenente le linee ed i punti che definiscono il dominio 2-D di interesse, il **Density**, contenente i dati di densità della griglia su ciascun componente del Domain Outline, ed il **Data**, che può contenere qualsiasi tipo di informazione numerica;
3. *Maps type layers*: contengono mappe importabili in formato DXF che vengono visualizzate come immagini non modificabili sul plot elettronico. Di default, il layer destinato a questa funzione è **Maps**.

In un progetto vuoto come “Untitled” ciascuno di questi layer è ovviamente vuoto e può essere via via riempito dall'utente, il quale può anche definire un numero teoricamente infinito di ulteriori layer del tipo prescelto. Il simbolo raffigurante un occhio posto a fianco del nome di ciascun layer nella finestra **Layers of Untitled** indica la visibilità o meno del layer, mentre il “tick” posto alla sinistra segnala il layer correntemente attivo (Figura 4). Aprendo un progetto nuovo, il layer attivo di default è **Domain Outline**. L'utente può compiere operazioni solo sugli oggetti contenuti nel layer attivo, mentre tutti gli altri oggetti degli altri layer sono semplicemente visualizzati ma non accessibili.

Nel seguito ci concentreremo sulle funzionalità di base utili alla discretizzazione triangolare di un dominio 2-D. Si utilizzeranno, pertanto, i soli layers **Domain Outline**, **Density** e **Trimesh** tralasciando tutti gli altri.

2.1 Definizione del dominio di integrazione

Per analizzare le funzioni di base di MeshMaker ci serviamo di un esempio pratico. Si supponga di dover discretizzare il dominio irregolare di Figura 5 al fine di sviluppare un modello idrodinamico del flusso superficiale su tale area costiera e progettare di conseguenza le necessarie opere arginali di difesa nonché l'altezza dei ponti e dei rilevati stradali. Il dominio viene “tagliato” in corrispondenza dei punti o degli elementi geografici significativi che delimitano la zona di reale interesse. Ad esempio, ad ovest vi è una catena montuosa che chiude il bacino e che costituisce un boundary naturale al modello idrodinamico. A nord supponiamo di avere misure di portata del fiume a partire dalla sezione indicata in figura, mentre ad est il ruolo di chiusura naturale del bacino è fornito da un rilevato autostradale. A sud-est, infine, si sceglie una sezione a flusso nullo

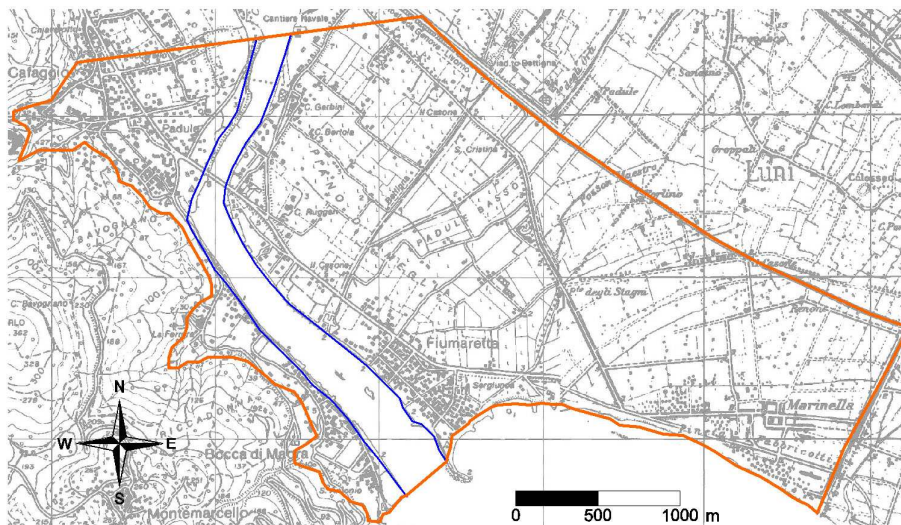


FIGURA 5: *Esempio di dominio per un modello idrodinamico realistico.*

ortogonale alle linee di livello, mentre a sud la chiusura naturale avviene in corrispondenza della costa. In Figura 5 si evidenzia, in particolare, la linea che identifica il principale corso d'acqua che costituisce l'elemento scolante del bacino.

Invocando il programma MeshMaker dal menu Start, si apre una finestra analoga a quella riportata in Figura 4 su un progetto vuoto denominato "Untitled". Il boundary del dominio da triangolare va collocato nel layer **Domain Outline**. Dopo aver reso attivo tale layer nel progetto, l'importazione si effettua selezionando dal menu **File** l'opzione **Import**. I punti e le linee che costituiscono il boundary del dominio si possono leggere in diversi formati, quali il formato DXF di AUTOCAD, un qualsiasi Spreadsheet (foglio elettronico) oppure in normale formato Testo. In quest'ultimo caso bisogna seguire delle opportune convenzioni nella successione dei punti per le quali si rimanda al manuale d'uso del MeshMaker. L'opzione più semplice e normalmente più conveniente per i progetti realizzati in campo ingegneristico è quella di utilizzare il formato DXF esportato da AUTOCAD. Si noti che in questo caso MeshMaker è in grado di riconoscere solamente linee, polilinee ed i vertici corrispondenti. In particolare, il boundary esterno del dominio 2-D *deve* essere importato come un'unica polilinea chiusa.

Oltre al boundary del dominio, nel layer **Domain Outline** possono essere importate alcune linee aggiuntive interne al dominio lungo le quali, per particolari esigenze, si vuole collocare una sequenza di nodi. Nel caso in esame, siamo interessati ad avere la soluzione al problema lungo il bordo del corso d'acqua per poter progettare, ad esempio, l'altezza più adeguata per il rilevato arginale. Oltre al boundary esterno, quindi, importiamo (con un unico o con più file in formato DXF) due ulteriori polilinee, come mostrato in Figura 6. Si noti che le polilinee interne al boundary del dominio lungo le quali vogliamo collocare una sequenza di nodi *devono necessariamente* essere

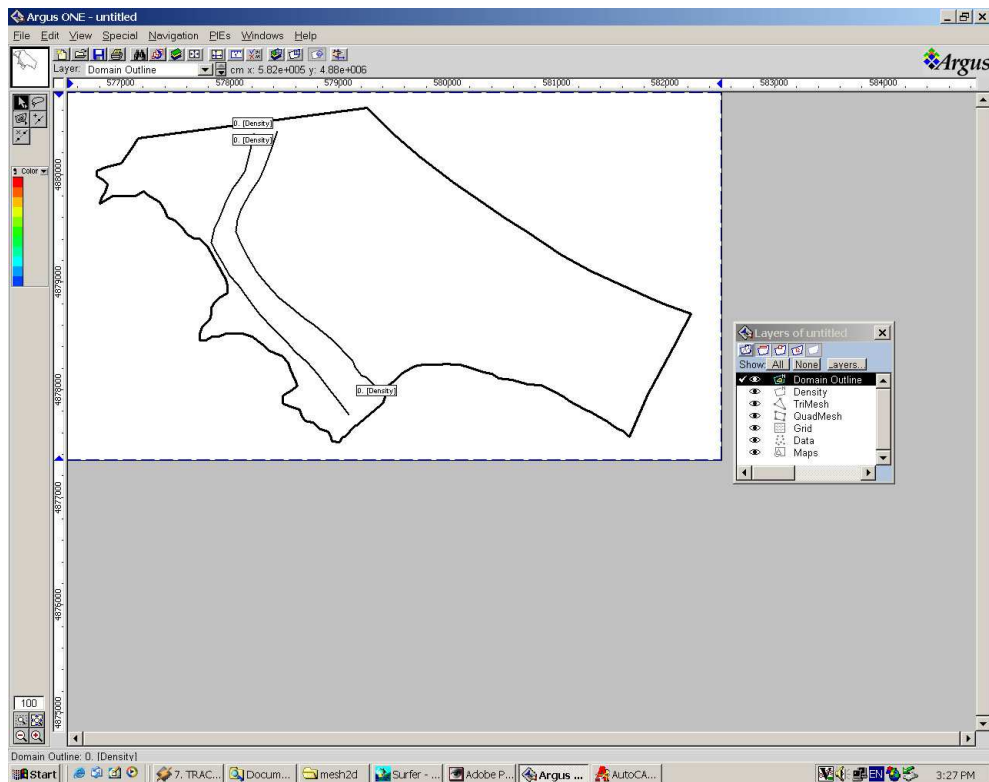


FIGURA 6: Importazione di polilinee nel layer Domain Outline.

distinte fra di loro, non devono, cioè, intersecarsi nemmeno con il bordo del dominio. Per questo motivo, come si vede in Figura 6, le polilinee che delimitano il corso d’acqua sono state interrotte prima di raggiungere il boundary. Qualora ci siano intersezioni, MeshMaker lo segnala all’utente con un messaggio d’errore e non importa le polilinee corrispondenti. Se si importa all’interno del dominio una polilinea chiusa, questa viene interpretata dal programma come una sorta di “buco” del dominio e l’interno non viene triangolato.

Al momento dell’importazione di un file DXF in **Domain Outline** il programma chiede quali opzioni l’utente desideri seguire per adattare le dimensioni di default del plot elettronico rispetto a quelle reali del dominio. Normalmente l’opzione seguita è **fit only the imported objects**, con la quale le dimensioni del plot si adattano a quelle reali del dominio.

Si noti, infine, che MeshMaker consente di creare direttamente in **Domain Outline** delle linee, polilinee e poligoni chiusi con opportuni strumenti di grafica. Questi tool, tuttavia, consentono una grafica estremamente rudimentale per cui in applicazioni reali non vengono quasi mai utilizzati.

2.2 Generazione della mesh triangolare

Dopo aver definito il boundary del dominio da triangolare e gli eventuali elementi significativi al suo interno, si può procedere alla generazione della mesh. Anzitutto è necessario definire la raffinatezza

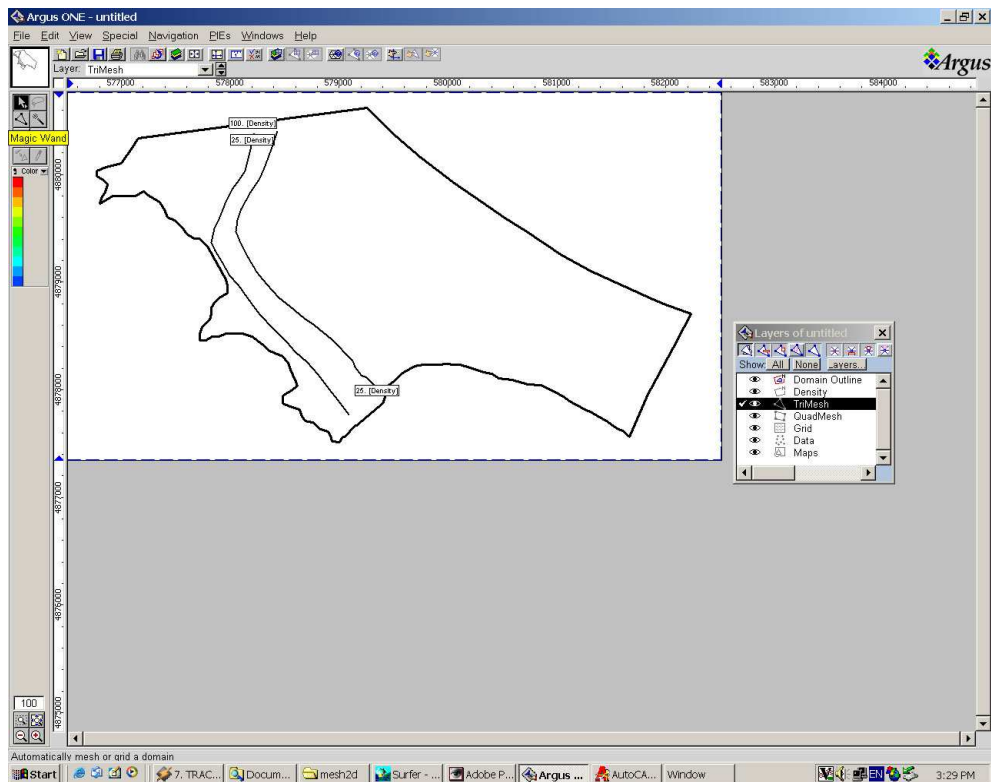


FIGURA 7: Selezione del “Magic Wand Tool” nel layer Trimesh.

della griglia e quindi la densità degli elementi. MeshMaker stabilisce questa proprietà assegnando valori opportuni al parametro **Density** che viene visualizzato nel layer **Domain Outline** su ciascuna polilinea (vedi Figura 6). Di default, tale parametro è zero e può essere modificato semplicemente con un doppio click sulla polilinea considerata. Il parametro **Density** individua la distanza media fra due nodi consecutivi generati lungo la polilinea. Tale dimensione, che corrisponde in prima approssimazione alla lunghezza dei lati degli elementi triangolari, viene modificata gradualmente muovendosi fra due polilinee distinte a cui sono collegati diversi valori di **Density**, seguendo particolari impostazioni che possono essere modificate dall'utente.

Nell'esempio in esame, si assegna un valore di **Density** pari a 100 per il boundary esterno e pari a 25 per le polilinee interne. Questo assicura una maggiore finezza della mesh, e quindi una maggiore concentrazione di nodi, lungo una zona di particolare interesse per il modello.

Il parametro **Density** può essere modificato anche dal layer omonimo. Dopo aver attivato tale layer, è possibile definire dei poligoni chiusi mediante dei tool grafici del tutto analoghi a quelli presenti in **Domain Outline**. A ciascun poligono, con un semplice doppio click, si assegna un valore di densità che corrisponde alla dimensione media del lato degli elementi generati all'interno del poligono stesso. In tal modo, è possibile individuare una serie di “zone” nel dominio di integrazione a densità variabile, con passaggio graduale da una all'altra. Si osservi che, a differenza del layer

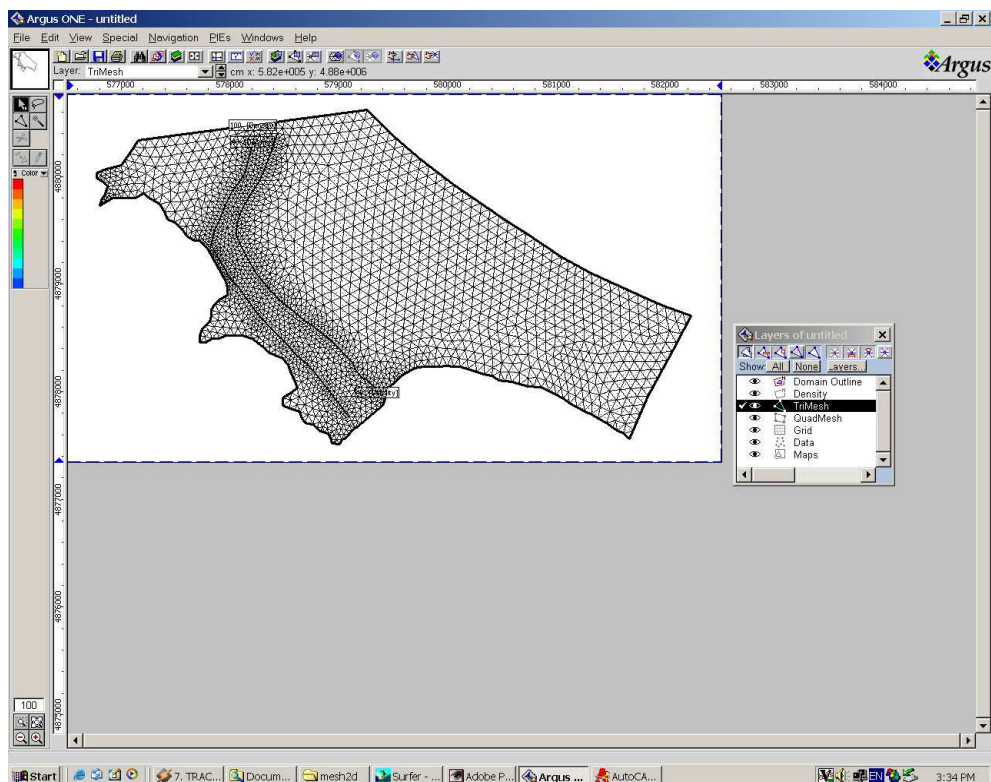


FIGURA 8: *Esempio di mesh triangolare.*

Domain Outline, non si vincolano i nodi a giacere direttamente sulla traccia del poligono che delimita una zona di densità. Questo permette di creare forme diverse senza la necessità di grande precisione nella definizione dei contorni.

La griglia va generata nel layer **Trimesh**, che, pertanto, va attivato con un click sulla piccola finestra a destra del plot. In alto a sinistra nella finestra principale del programma compare un menu di pulsanti (Figura 7) fra i quali va selezionato il “Magic Wand Tool”, contrassegnato da un simbolo rassomigliante ad una bacchetta magica. Cliccando successivamente sul plot elettronico, all’interno del dominio del problema, il software genera la griglia ad elementi triangolari (Figura 8). Durante la generazione, MeshMaker segnala il numero approssimativo di elementi che verranno costruiti con le impostazioni definite dall’utente. Qualora ciò non risultasse soddisfacente (ad esempio viene generato un numero eccessivo o troppo piccolo di elementi) è possibile a questo punto bloccare la procedura e reimpostare i valori di **Density** tornando sul layer **Domain Outline** oppure **Density**. Nel caso proposto, per ridurre la dimensione della griglia i valori di **Density** lungo le polilinee che delimitano il corso d’acqua sono stati aumentati a 40. Dal menu **View** si può, infine, selezionare la modalità di visualizzazione preferita della griglia così generata. Per esempio, in Figura 8 si è scelto di visualizzare gli elementi in trasparenza, in modo da poter vedere contemporaneamente anche gli oggetti contenuti negli altri layer.

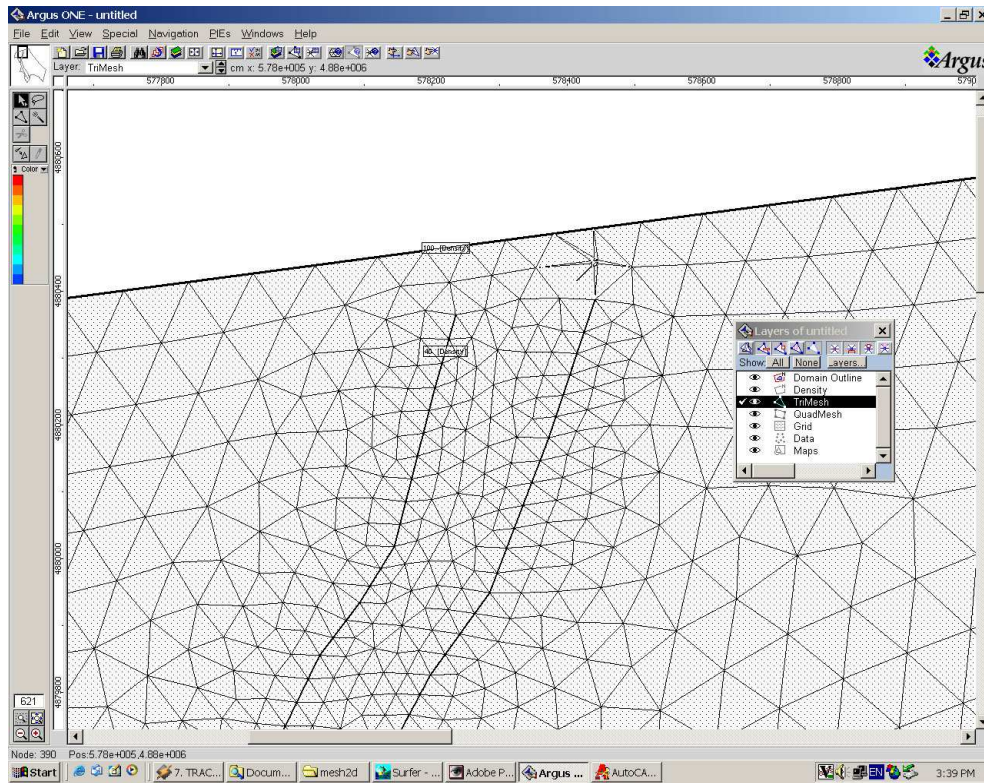


FIGURA 9: *Esempio di spostamento di un nodo.*

È possibile operare a questo punto numerose modifiche alla griglia triangolare qualora questa non soddisfacesse alle esigenze del problema. Ad esempio, si può raffinare localmente la griglia selezionando un insieme di elementi adiacenti (con il “Select Tool”, identificato da una freccia, o con il “Lasso Tool”, identificato da una linea chiusa, selezionati mediante i tasti elettronici del menu in alto a sinistra nella finestra principale) e cliccando dal menu **Special** l’opzione **Refine Elements**. Si osservi che l’operazione di raffinamento locale della mesh compromette la condizione di Delaunay che, pertanto, non è più soddisfatta. Si può migliorare automaticamente il risultato ottenuto selezionando gli elementi che appaiono maggiormente deformati e cliccando dal menu **Special** l’opzione **Smooth**. La griglia può anche essere modificata manualmente dall’utente selezionando un nodo o un elemento con il “Select Tool” e tenendo premuto il tasto sinistro del mouse (Figura 9). Un’altra opzione importante è relativa alla rinumerazione della mesh per minimizzare la larghezza di banda generata nella topologia della corrispondente matrice. Per sfruttare questa opportunità basta cliccare sempre sul menu **Special** e selezionare l’opzione **Renummer**. Si ricordi nella finestra di dialogo corrispondente di rendere attiva l’opzione **Optimize Bandwidth**. Numerose altre modifiche minori sono lasciate alla sperimentazione dell’utente.

Un’importante operazione da eseguire nella costruzione di una mesh consiste nella definizione di uno o più parametri da assegnare a ciascun elemento per poterne individuare determinate

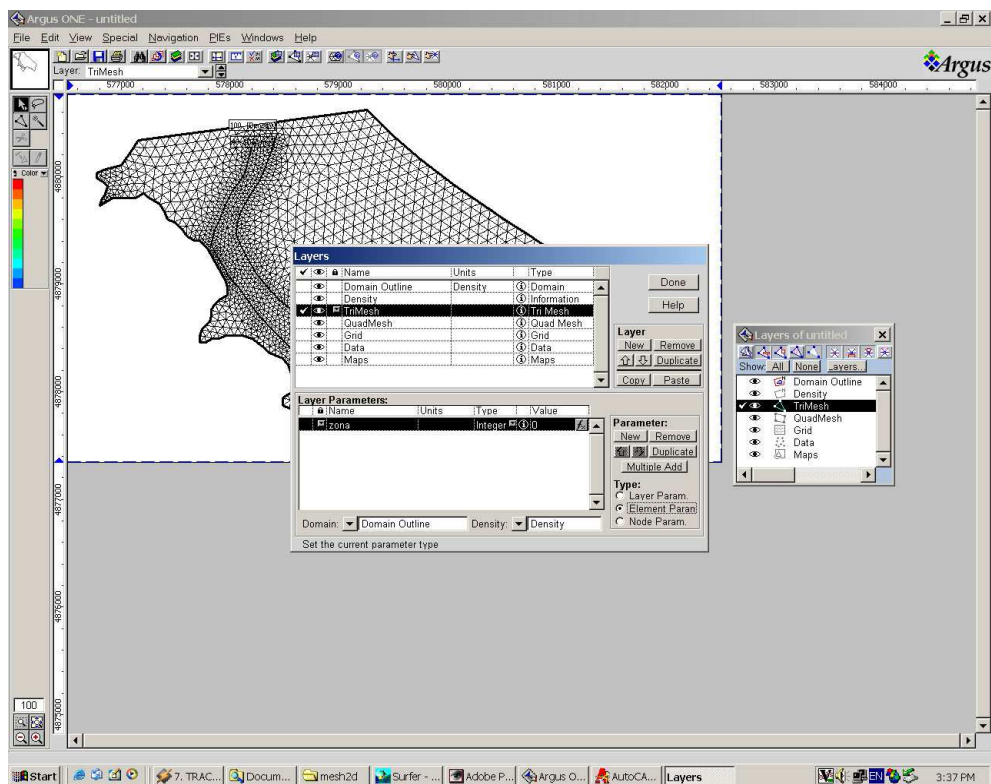


FIGURA 10: Definizione di un nuovo parametro nel layer Trimesh.

caratteristiche. Nel caso in esame, supponiamo per esempio di suddividere il dominio in 3 zone (letto del fiume, est ed ovest del corso d’acqua) caratterizzate da un diverso tipo di terreno e quindi da una differente capacità di lasciar filtrare l’acqua nel sottosuolo. Creiamo anzitutto un nuovo parametro nel layer **Trimesh**. Per fare questo è sufficiente aprire la finestra di dialogo **Layers** dal menu **View** e selezionare all’interno di tale finestra l’opzione **New Parameter**, assegnandovi il nome (nel nostro caso “zona”), il tipo (“Integer”, “Real”, o “Boolean”), l’oggetto su cui si applica (per noi “Element Parameter”) ed il valore (inizialmente posto nullo) (Figura 10). Con il “Lasso Tool” si selezionano gli elementi appartenenti ad una zona, ad esempio quella ad est del corso d’acqua che identificheremo con l’indice 1 (Figura 11). Si ricordi che per selezionare nuovi elementi mantenendo memorizzati i precedenti è necessario nell’uso del “Lasso Tool” tenere premuto il tasto “Shift”. Dopo aver completato la selezione assegniamo il parametro desiderato cliccando dal menu **Navigation** l’opzione **Elements Info**. Si apre una nuova finestra di dialogo dalla quale è possibile modificare il valore del parametro “zona” precedentemente definito (Figura 12). Va sottolineato che in tale finestra in realtà si visualizzano e si possono modificare le info relative ad uno solo degli elementi selezionati. Per estendere la modifica a tutta la selezione è necessario cliccare all’interno della finestra delle info sul tasto elettronico **Set All**.

Si può, infine, visualizzare la modifica assegnando una scala di colori al parametro “zona”.

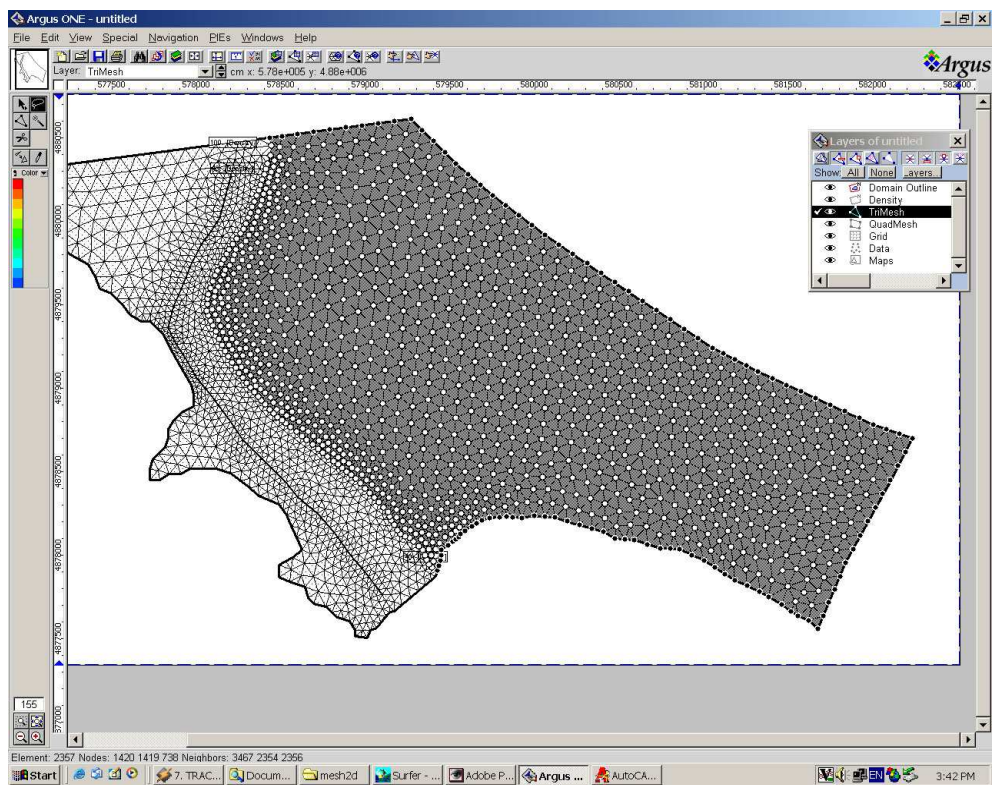


FIGURA 11: Selezione della zona ad est del corso d'acqua.

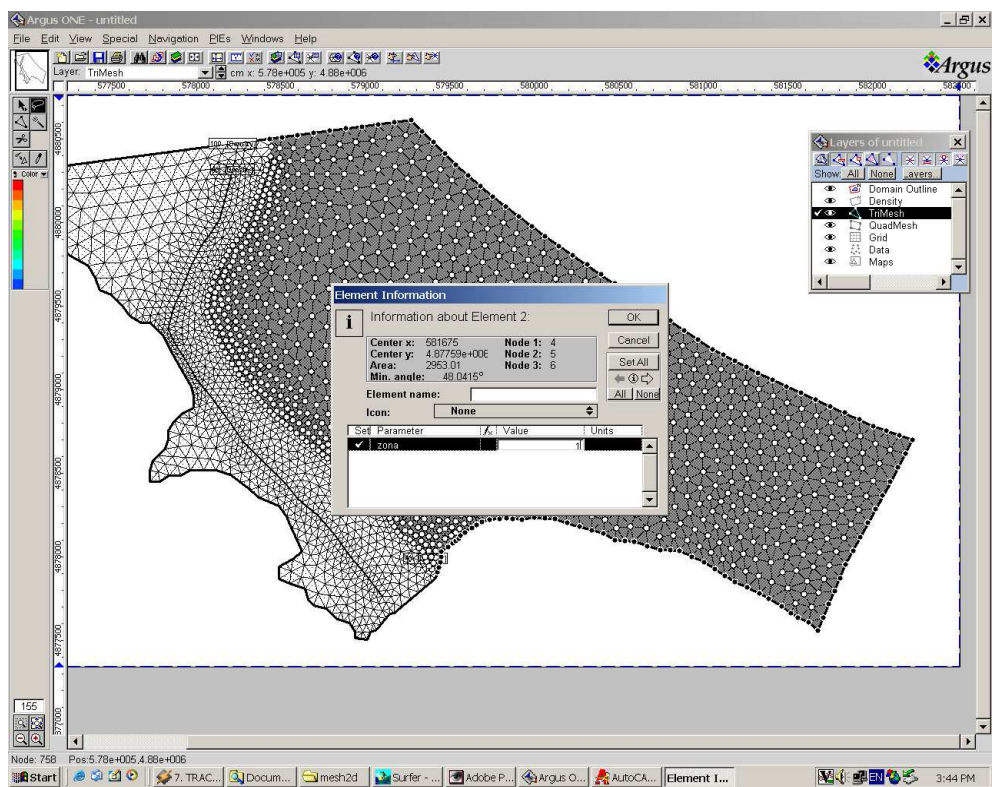


FIGURA 12: Modifica del parametro "zona".

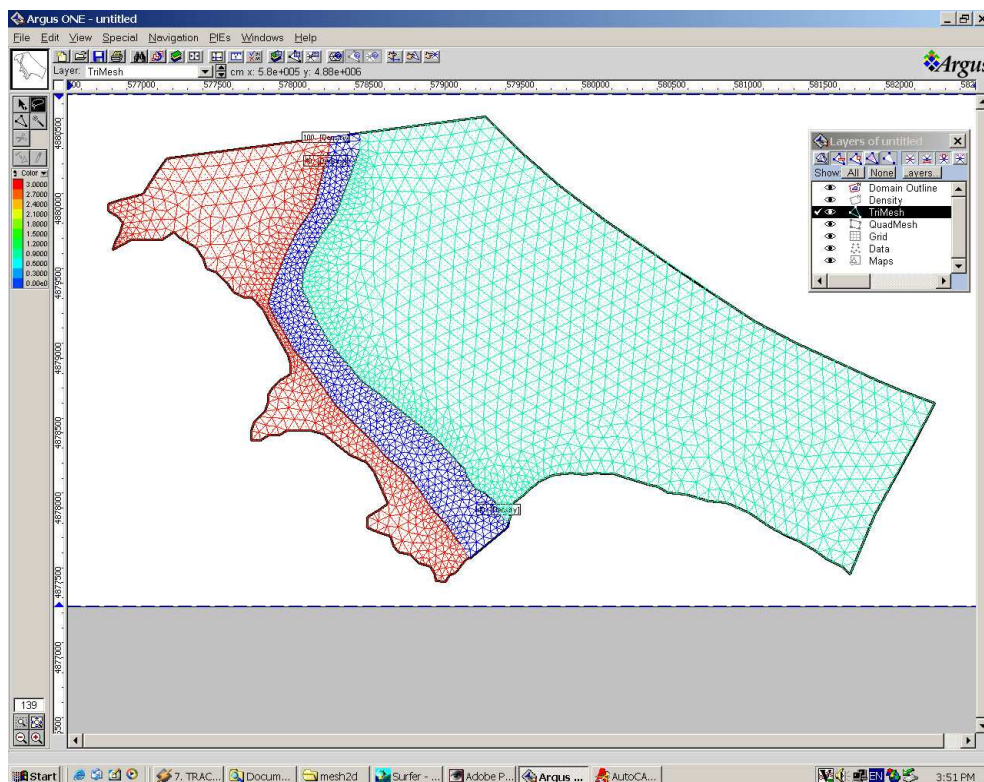


FIGURA 13: *Visualizzazione della mesh con una scala di colori per le zone.*

Cliccando sul tasto **Color** a sinistra della finestra principale, si apre un menu nel quale sono contenuti tutti i parametri definiti nel layer corrente. Selezionando con un “tick” il parametro “zona” ad ogni elemento triangolare verrà assegnato un colore in funzione del valore di tale parametro. Dopo aver individuato le altre due zone (letto del fiume e ad ovest del corso d’acqua) mediante gli indici 2 e 3, la griglia appare come in Figura 13.

2.3 Esportazione della topologia della griglia

MeshMaker consente di esportare la mesh generata nel progetto corrente in file ASCII con grande libertà a seconda delle necessità dell’utente. Per impostare a proprio piacimento la struttura delle unità in output va selezionata dal menu **File** l’opzione **Export** e successivamente **Edit Template**. Si apre in tal modo una finestra di dialogo (Figura 14) che permette di scegliere il contenuto del file che si decide di esportare. Di default, l’esportazione avviene nel file “Trimesh.exp” contenente il numero di nodi, di elementi e degli eventuali parametri definiti nel layer **Trimesh**. Sono quindi posti in successione i nodi, individuati in ogni riga dal prefisso “N”, dall’indice del nodo e dalle coordinate x ed y , e poi gli elementi, con il prefisso “E”, l’indice dell’elemento, la sequenza dei nodi in senso antiorario e gli eventuali parametri ad essi relativi.

Normalmente, la topologia di una mesh viene definita da 3 file:

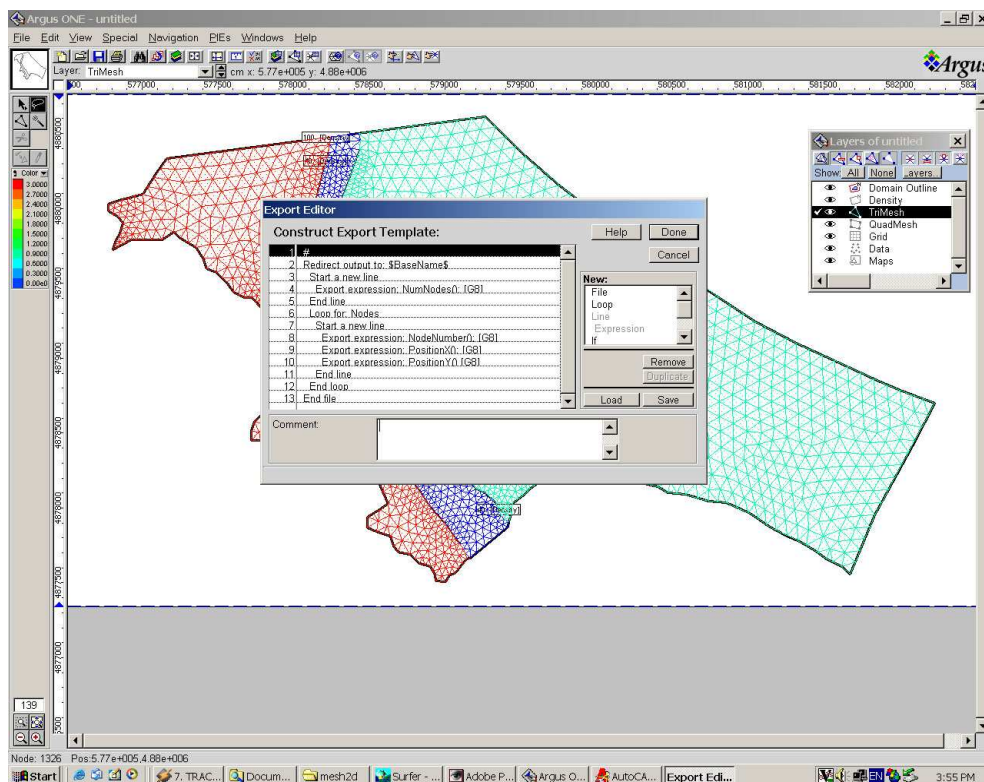


FIGURA 14: Definizione del template con cui esportare i dati della mesh.

1. file **coord**: definisce il numero di nodi e le coordinate nodali;
2. file **topol**: definisce la topologia della griglia, individuando il numero di elementi e la successione di nodi per ciascun elemento ordinati in senso antiorario;
3. file **bound**: definisce i nodi su cui vanno applicate le condizioni iniziali e/o al contorno.

In Figura 14 si riporta lo schema del template utilizzato per l'esportazione del file **coord**. Per gli altri file, si lascia allo studente l'opportunità di scegliere la struttura più conveniente a seconda della lettura successivamente prevista per il codice ad elementi finiti.

Dopo aver definito il template, è possibile salvarlo su un file MET (tasto **Save**) e ricaricarlo anche in seguito (tasto **Load**). L'esportazione avviene cliccando dal menu **File** l'opzione **Export** e quindi **Export by template**. Per esportare solo parte della mesh, ad esempio nella creazione del file **bound**, può essere utile selezionare gli oggetti di interesse con il "Select Tool" od il "Lasso Tool" ed utilizzare l'opzione **Export Trimesh** e **Export Selection Only**.

Infine, il progetto così realizzato va salvato in un file con estensione MMB cliccando nel menu **File** l'opzione **Save**. L'unità appena costruita contiene tutte le informazioni accumulate nell'elaborazione in formato binario in modo da poter essere eventualmente recuperate in un momento successivo in cui sia necessario riaprire e modificare la mesh.