Corso di Calcolo Numerico per Ingegneria per l'Ambente e il Territorio

Terza Esercitazione
Sulla Soluzione di Sistemi Lineari con Metodi Iterativi

Si vuole risolvere il sistema lineare: $Ax = b$ dove la matrice A e il vettore b sono dati da:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Costruire un programma FORTRAN che risolva il sistema assegnato con lo schema di sovrarilassamento (SOR) che si può scrivere per componenti come segue:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

dove con $x_{i,\,S}^{(k+1)}$ si intende la i-esima componente dell'iterazione $k+1$-esima del metodo di Gauss-Seidel.

Partendo da $\omega = 1$ e finendo con $\omega = 1.5$ con passo $\Delta\omega = 0.025$ si risolva il sistema per i 21 diversi valori di ω. Si fissi la tolleranza in uscita TOL come segue: $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_2 < TOL$ con $TOL = 10^{-9}$.

Si utilizzi doppia precisione in tutti i calcoli reali. Per ogni valore di ω e ad ogni iterazione, si stampino i seguenti risultati:

- l'iterazione corrente,
- la norma euclidea del vettore degli scarti $d^{(k)} = \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_2$,
- la stima della costante asintotica di convergenza M utilizzando il rapporto tra le norme degli scarti consecutivi.
- la stima della velocità asintotica di convergenza $R = -\log_{10} M$.

Il metodo SOR deve essere implementato mediante una `subroutine`. Si producano, poi, due grafici:

- un grafico riporti il numero di iterazioni effettuate per arrivare a convergenza al variare di ω (sull'asse delle x si riporti ω, sull'asse delle y le corrispondenti iterazioni).
  - Mediante il grafico si stimi un valore approssimato di ω_{opt}.

- un grafico semilogaritmico riporti la norma euclidea degli scarti del metodo di Gauss-Seidel ($\omega = 1$) in funzione di k. Si calcoli, quindi, $\rho(E_S)$ utilizzando il valore della pendenza del segmento rettilineo del grafico.
  - Perchè si può approssimare $\rho(E_S)$ dalla pendenza del segmento?
  - Questo valore è stato già ricavato durante l'esecuzione del programma FORTRAN?
  - Osservando che la matrice è biciclica e coerentemente ordinata si verifichino le altre ipotesi del teorema di Young-Varga cioè che la matrice di iterazione di Jacobi ha tutti autovalori reali e che il metodo di Jacobi converge e che quindi esiste una formula esplicita per ω_{opt}. Si confronti pertanto il valore esatto di ω_{opt} dato da:

    $$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(E_S)}}$$

    con l'ω_{opt} calcolato numericamente.

Si scriva una breve relazione descrivendo il problema, il metodo utilizzato e i risultati ottenuti. Nella relazione si includano **i grafici** e si alleghino **il testo del programma sorgente FORTRAN** e **i file di risultati** ottenuti dalla sua esecuzione.

Note di implementazione

Un algoritmo per l'implementazione del metodo si può riassumere nel seguente modo:

ALGORITMO SOR:

dati di input: $x^{(0)}$ (soluzione iniziale), $IMAX$ (max. n. di iterazioni) $TOLL$ (tolleranza di uscita), scarto (inizializzato a $= 2 * TOLL$);

DO WHILE scarto $> TOLL$ and $iter \leq IMAX$

1. $k \leftarrow k + 1$
2. DO $i = 1, n$
   (a) som1$= \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)}$
   (b) som2$= \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}$
   (c) $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}(b_i - \text{som1} - \text{som2})$
3. END DO
4. scarto$= ||x^{(k+1)} - x^{(k)}||$
5. $x^k \leftarrow x^{(k+1)}$

END DO