Calcolo Numerico Ingegneria Civile

INTEGRAZIONE NUMERICA

Anno accademico 2010-2011

INTEGRAZIONE NUMERICA

$$I = \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b P_n(x)\ dx + \int_a^b E_n\ dx.$$

con

$$\int_a^b P_n(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i).$$

- La scelta del polinomio interpolante dipende dalla scelta dei punti in $[a, b]$.
- I punti x_i, detti *nodi*, o *punti di appoggio* possono essere *equidistanti* oppure *no*.
  - *equidistanti*: *formule di Newton-Cotes*
  - *non equidistanti*: *formule di Gauss.*

Formule di Newton–Cotes

- n = 1 ($n+1=2$ punti $x_0=a, x_1=b$):
  Formula dei Trapezi

$$\boxed{I=\frac{b-a}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]+E_1}$$

- n = 2 ($n+1=3$ punti $x_0=a, x_1=\frac{a+b}{2}$ e $x_2=b$):
  Formula di Cavalieri–Simpson

$$\boxed{I=\frac{b-a}{6}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]+E_2}$$

FORMULE COMPOSTE

IDEA: Suddividere l'intervallo $[a, b]$ in n sottointervalli definiti dai punti di appoggio $x_0, x_1, \ldots, x_n$, equidistanti,
dove $a = x_0$, $b = x_n$ e
$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{x_n - x_0}{n}$

e calcolare l'integrale su $[a, b]$ come somma degli integrali su tali sottointervalli:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx \quad = \quad \int_a^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\, dx.$$

Su ciascun intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, per $i = 1, \ldots, n$, approssimiamo l'integrale della f mediante la formula di quadratura SEMPLICE.

ERRORE

L'errore finale che si commette nell'approssimazione dell'integrale $I = \int_a^b f(x)\,dx$ mediante le **formule composte** è la somma degli errori commessi sui singoli sottointervalli.

Trapezi:

$$\boxed{E_{trap} = -\frac{f''(u)}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}}$$

L'errore tende a zero come $\frac{1}{n^2}$

Cavalieri–Simpson:

$$\boxed{E_{cav} = -\frac{f^{IV}(u)}{2880}\frac{(b-a)^5}{n^4},}$$

L'errore tende a zero come $\frac{1}{n^4}$

dove n è il numero di sottointervalli e u un opportuno punto in $[a, b]$.

TERZA ESERCITAZIONE

Scrivere un programma FORTRAN che calcoli il valore approssimato dell'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ con $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ per i seguenti valori di a e b:

- **Caso test (1)** $a = 1$ e $b = 2$
- **Caso test (2)** $a = 0$ e $b = 2$

applicando le **formule composte** dei Trapezi e di Cavalieri-Simpson su suddivisioni uniformi dell'intervallo $[a, b]$.

- In particolare, si usino $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$ suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$.
- Si utilizzi **doppia precisione** in tutti i calcoli reali.

TERZA ESERCITAZIONE

Per ogni numero di suddivisioni, n, si calcoli l'errore esatto commesso con i due metodi, calcolando analiticamente il valore esatto dell'integrale della f,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

e calcolando $I = F(b) - F(a)$ e

$$E_{trap} = I_{trap} - I$$

$$E_{cav} = I_{cav} - I$$

IMPLEMENTAZIONE FORTRAN

- Le formule di quadratura semplici dei Trapezi e di Cavalieri–Simpson si implementano tramite una *function*.
- Per ogni numero di suddivisioni n occorre:
  1. calcolare gli estremi del sottointervallo, assumendo punti equidistanti con passo $h = \frac{(b-a)}{n}$.
  2. calcolare I_{trap} e I_{cav} con le *function* che implementano le formule di quadrature semplici.

Programma Fortran

```
      Ivera = primitiva(b) - primitiva(a)
      n = 1
      do while (n.le.maxint)
         Icav = 0.d0
         Itrap = 0.d0
         h = (b-a)/dfloat(n) !! ampiezza del sottointervallo
C implementazione delle formule composte
         do i = 0,n-1
            xa = a + dfloat(i)*h
            xb = xa + h
            Itrap = Itrap + trap(xa,xb)
            Icav = Icav + cavsim(xa,xb)
         end do
C calcolo dell'errore vero
         Etrap = Itrap - Ivera
         Ecav = Icav - Ivera
C stampa output
         ....
         n = n*2
      end do
```

ESEMPIO DI OUTPUT

$$I = \int_1^2 \cos x dx = 0.0678264420$$

n	sol. tra	sol. cav	err-trap	err-cav	rapp-trap	rapp-cav
1	0.06207773	0.06785071	-0.57487E-02	0.24271E-04		
2	0.06640747	0.06782792	-0.14190E-02	0.14830E-05	4.0513	16.3664
4	0.06747281	0.06782653	-0.35363E-03	0.92167E-07	4.0126	16.0899
8	0.06773810	0.06782645	-0.88339E-04	0.57524E-08	4.0031	16.0224
16	0.06780436	0.06782644	-0.22080E-04	0.35940E-09	4.0008	16.0056
32	0.06782092	0.06782644	-0.55198E-05	0.22460E-10	4.0002	16.0014
64	0.06782506	0.06782644	-0.13799E-05	0.14037E-11	4.0000	16.0005
128	0.06782610	0.06782644	-0.34498E-06	0.87735E-13	4.0000	15.9997
256	0.06782636	0.06782644	-0.86246E-07	0.54123E-14	4.0000	16.2103