Corso di Calcolo Numerico

Esercitazione 2.
Sulla Soluzione di Sistemi Lineari

Si vuole risolvere il sistema lineare: $Ax = b$ dove la matrice A e il vettore b sono dati da:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Costruire un programma FORTRAN che risolva il sistema assegnato con lo schema di sovrarilassamento:

$$(\omega L + D)x_{k+1} = [(1-\omega)D - \omega U]x_k + \omega b$$

Partendo da $\omega = 1$ e finendo con $\omega = 1.5$ con passo $\Delta\omega = 0.05$ si risolva il sistema per i diversi valori di ω. Si fissi la tolleranza in uscita ε come segue: $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ con $\varepsilon \leq 10^{-8}$, essendo $\|.\|$ la norma euclidea. Si utilizzi doppia precisione in tutti i calcoli reali. Per ogni valore di ω e ad ogni iterazione, si stampino i seguenti risultati:

- l'iterazione corrente,
- la norma euclidea del vettore degli scarti $d_k = \|x_k - x_{k-1}\|$,
- la stima della costante asintotica di convergenza M (utilizzando il rapporto delle norme degli scarti $M = d_k/d_{k-1}$),
- la stima della velocità asintotica di convergenza R (utilizzando la stima della costante asintotica $R = -\log(M)$).

Si facciamo, poi, due grafici:

- un grafico riporti il numero di iterazioni effettuate per arrivare a convergenza al variare di ω (sull'asse delle x si riporti ω, sull'asse delle y le corrispondenti iterazioni).
  - Mediante il grafico si stimi un valore approssimato di ω_{opt}.
- un grafico semilogaritmico riporti la norma euclidea degli scarti del metodo di Seidel ($\omega = 1$) in funzione di k. Si calcoli, quindi, $\lambda_{1,s}$ utilizzando il valore della pendenza del segmento rettilineo del grafico.
  - Perchè si può approssimare $\lambda_{1,s}$ dalla pendenza del segmento?
  - Questo valore è stato già ricavato durante l'esecuzione del programma FORTRAN?
  - Osservando che la matrice gode di proprietà A ed è coerentemente ordinata si confronti il valore esatto di ω_{opt} dato da:

    $$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \lambda_{1,s}}}$$

    con l'ω_{opt} calcolato numericamente.

Si scriva una breve relazione descrivendo il problema, il metodo utilizzato e i risultati ottenuti. Nella relazione si includano i grafici e si alleghino il testo del programma FORTRAN e i files di risultati ottenuti dalla sua esecuzione.

All'esame non sono ammesse fotocopie. Portare tutto il materiale prodotto in originale.

Note sull'implementazione del metodo di SOR

Sia da risolvere il sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

con A matrice $n \times n$, $\mathbf{x}$ vettore $n \times 1$ e $\mathbf{b}$ vettore $n \times 1$. Decomponendo la matrice in $A = L + D + U$, dove

$$l_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{se } i < j, \\ 0, & \text{se } i \geq j. \end{cases} \quad ; \qquad d_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad ; \qquad u_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{se } i > j, \\ 0, & \text{se } i \leq j. \end{cases} \tag{2}$$

e sostituendo nel sistema iniziale (1), dopo facili calcoli si ottiene:

$$(\omega L + D)x_{k+1} = [(1-\omega)D - \omega U]x_k + \omega b \tag{3}$$

che è l'espressione dello schema di SOR. Si ricorda che per $\omega = 1$ si ottiene lo schema di Seidel.

La i-esima componente dell'equazione (3) si scrive:

$$\omega \sum_{j=1}^{n} l_{ij} x_{k+1,j} + \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{k+1,j} = (1-\omega) \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{k,j} - \sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_{k,j} + \omega b_i$$

Dalla (2) si osserva che gli elementi diagonali e della triangolare superiore (inferiore) della L (U) sono nulli, mentre la D ha solo gli elementi diagonali diversi da zero. La (3) si può dunque scrivere:

$$\sum_{j=i}^{i} d_{ij} x_{k+1,j} = \sum_{j=i}^{i} d_{ij} x_{k,j} + \omega \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_{k+1,j} - \sum_{j=i}^{i} d_{ij} x_{k,j} - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_{k,j} \right)$$

per cui, notando che $\sum_{j=i}^{i} d_{ij} x_j = a_{ii} x_i$, si ottiene:

$$x_{k+1,i} = x_{k,i} + \omega \left[\frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_{k+1,j} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_{k,j} \right) - x_{k,i} \right] = x_{k,i} + \omega \left(x_{k+1,i}^{(S)} - x_{k,i} \right)$$

dove $x_{k+1,i}^{(S)}$ è la componente i-sima del vettore soluzione al passo $k+1$ ottenuto con lo schema di Seidel.

Un algoritmo per l'implementazione del metodo si può riassumere nel seguente modo:

ALGORITMO SOR:

dati di input: x_k (soluzione iniziale), $IMAX$ (max. n. di iterazioni) $TOLL$ (tolleranza di uscita), scarto= $2 * TOLL$;

DO WHILE scarto $> TOLL$ and $iter \leq IMAX$

1. $iter \leftarrow iter + 1$
2. DO $i = 1, n$
   a. som1 $= \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_{k+1,j}$
   b. som2 $= \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_{k,j}$
   c. $x_{k+1,i}^{(S)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \text{som1} - \text{som2})$
   d. $x_{k+1,i} = x_{k,i} + \omega(x_{k+1,i}^{(S)} - x_{k,i})$
3. END DO
4. scarto= $||x_{k+1} - x_k||$
5. $x_k \leftarrow x_{k+1}$

END DO