Corso di Calcolo Numerico
Esercitazione 1.
Sulla Soluzione di Equazioni non Lineari

Si risolvano i seguenti problemi in cui si cerca la radice di una funzione, implementando ed eseguendo opportuni programmi in linguaggio FORTRAN.

Si calcoli l'approssimazione x_k della radice a meno di una tolleranza `TOLL`$=10^{-10}$, cioè si iteri ciascun metodo fino a quando lo scarto tra due approssimazioni successive, $d_k = |x_k - x_{k-1}|$, non diventa minore della tolleranza richiesta. Si fissi, come numero massimo di iterazioni da eseguire, il valore `ITMAX=100`.

Problema 1

Si vuole risolvere l'equazione $f(x) = 0$ con $f(x) = \ln(x+2) - 2x$, nell'intervallo $]-2, 2]$ applicando i metodi di Newton-Raphson, della Regula Falsi (secante variabile) e del punto fisso. Si verifichi l'ordine di convergenza dei metodi applicati mediante lo studio della stima del fattore di convergenza.

- Si risolva il problema applicando i metodi di Newton-Raphson e della Regula Falsi prendendo come punto iniziale $x_0 = -0.5$ e, per la Regula Falsi, $x_1 = 0.0$.
- Si risolva lo stesso problema applicando il metodo del punto fisso alle due funzioni di punto fisso g_1 e g_2 che si ottengono dalla f esplicitando rispettivamente x in funzione di $\ln(x+2)$ e $\ln(x+2)$ in funzione di x. Dalla soluzione numerica ottenuta da Newton-Raphson o dalla Regula Falsi, si studi, senza eseguire alcuna iterazione, quale schema di punto fisso converge e quale no, giustificando la risposta. Si implementino entrambi gli schemi di punto fisso partendo da $x_0 = -0.5$, osservando e spiegando il comportamento dei due schemi.

Problema 2

Si vuole approssimare la radice $\xi = 1$ del polinomio $p(x) = x(x-1)^3$ nell'intervallo $[-2, 2]$ applicando il metodo di Newton-Raphson partendo da $x_0 = 2.0$.

Per spiegare il comportamento del metodo, si stampino, ad ogni iterazione, $\dfrac{d_{k+1}}{(d_k)^2}$ e $\dfrac{d_{k+1}}{d_k}$. Dal momento che è nota la radice esatta, ad ogni passo si stampi anche l'errore esatto.

Facoltativo: *Riapplicare il metodo di Newton-Raphson sviluppando le potenze del binomio nelle function che definiscono $p(x)$ e $p'(x)$. Spiegare il comportamento del metodo.*

Modificare, poi, il metodo per ripristinare l'ordine di convergenza e risolvere il problema con le function scritte nei due modi di prima. Spiegare cosa succede. ■

Per entrambi i problemi, si stampino i risultati nel seguente modo:

✎ Per lo schema di punto fisso, ad ogni iterazione, stampare:

- ➠ l'indice di iterazione k (partendo da 0 per x_0);

- ➠ l'approssimazione x_k;
- ➠ lo scarto d_k;
- ➠ la stima della costante asintotica dell'errore $asint1 = d_k/d_{k-1}$
- ➠ la stima della costante asintotica dell'errore $asint2 = |g'(x_k)|$.

✎ Per il metodo di Newton-Raphson:

- ➠ l'indice di iterazione k ;
- ➠ l'approssimazione x_k;
- ➠ il valore $f(x_k)$;
- ➠ lo scarto d_k (per il Problema 2 aggiungere $e_k = |\xi - x_k|$);
- ➠ la stima della costante asintotica dell'errore $asint1 = d_k/d_{k-1}^2$ (per il Problema 2 aggiungere $asint1b = d_k/d_{k-1}$);
- ➠ la stima della costante asintotica dell'errore $asint2 = \left|\dfrac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}\right|$

✎ per il metodo della Regula Falsi:

- ➠ l'indice di iterazione k ;
- ➠ l'approssimazione x_k;
- ➠ il valore $f(x_k)$;
- ➠ lo scarto d_k;
- ➠ la stima della costante asintotica dell'errore $asint1 = d_k/d_{k-1}^{1.618}$
- ➠ la stima della costante asintotica dell'errore $asint2 = \left|\dfrac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}\right|^{0.618}$.

✎ Per ogni problema, si riporti in grafico semilogaritmico lo scarto in funzione delle iterazioni, realizzando un unico grafico in cui vi siano le curve relative ai metodi utilizzati. Per fare il grafico si usi Gnuplot o il foglio elettronico o altri programmi adatti allo scopo.

✎ Per ogni problema, si facciano, inoltre, i grafici della funzione f (p) e, per il Problema 1, delle due funzioni di punto fisso nell'intervallo assegnato (per le funzioni che non sono definite per $x = -2$ far partire il grafico da $x = -1.99999$).

✎ Tutti i risultati ottenuti siano opportunamente discussi scrivendo una relazione in un documento di testo, in cui si descrivono i problemi assegnati, i risultati ottenuti, il numero delle iterazioni richieste per soddisfare il criterio di stop, l'ordine di convergenza (includendo e descrivendo i grafici). Per il problema 1, si descrivano anche tutti i passaggi numerici per arrivare a g_1 e g_2, rispettivamente, a partire dalla f.

Si alleghino: i programmi FORTRAN, i risultati da essi ottenuti e i grafici. ❑

All'esame non sono ammesse fotocopie. Portare tutto il materiale prodotto in originale.