Esercitazione 2

Si vuole risolvere un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ costruendo un programma FORTRAN che implementi il metodo SOR

$$(\omega L + D)\mathbf{x}_{k+1} = [(1-\omega)D - \omega U]\mathbf{x}_k + \omega\mathbf{b}$$

utilizzando diversi valori di ω, da $\omega = 1$ a $\omega = 1.5$ con passo $\Delta\omega = 0.05$

Per ogni ω si considera $\mathbf{x}_{k+1}$ soluzione che approssima la soluzione esatta $\mathbf{x}$ se la norma euclidea dello scarto tra due approssimazioni successive è minore di una tolleranza `TOLL`=10^{-8}:

$$\|\mathbf{d}_{k+1}\| = \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| < \texttt{TOLL}$$

Fissiamo inoltre un numero massimo di iterazioni `ITMAX`, perchè se, effettuate `ITMAX` iterazioni, si ha $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \texttt{TOLL}$ allora diciamo che il metodo non sta convergendo alla soluzione (o sta convergendo molto lentamente).

Come implementare il metodo SOR?

Componente per componente, il metodo è:

per $i = 1, n$

$$\mathbf{x}_{k+1}^{(i)} = \mathbf{x}_k^{(i)} + \omega \left\{ \overbrace{\underset{\Uparrow}{\overset{D^{-1}}{\frac{1}{a_{ii}}}} \left[b_i - \underset{\Uparrow}{\overset{L\mathbf{x}_{k+1}}{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\mathbf{x}_{k+1}^{(j)}}} - \underset{\Uparrow}{\overset{U\mathbf{x}_k}{\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\mathbf{x}_k^{(j)}}} \right]}^{\mathbf{x}_{k+1,S}^{(i)}} - \mathbf{x}_k^{(i)} \right\}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{x}_{k+1}^{(i)} = \mathbf{x}_k^{(i)} + \omega \left(\mathbf{x}_{k+1,S}^{(i)} - \mathbf{x}_k^{(i)} \right)$$

Organizzazione del programma FORTRAN

- Dichiarazione delle variabili (e commento sul loro significato)
- Apertura dei files di input e output
- Lettura dei dati di input (dimensione n, numero massimo di iterazioni `ITMAX`, tolleranza `TOLL`, matrice A, termine noto $\mathbf{b}$)
- $\omega \leftarrow 1$
- Fino a quando $\omega \leq 1.5$: (`DO WHILE` $\omega \leq 1.5$)
  - inizializzazione del vettore `xold` come vettore di tutti zeri;
  - chiamata di una subroutine che implementa il metodo SOR per quel determinato valore di ω e stampa i risultati intermedi: iter, norma euclidea dello scarto, stima del fattore di convergenza e della velocità di convergenza;

RICORDIAMO: come si è visto nel programma sul metodo di Jacobi, la stima del fattore di convergenza è data mediante il rapporto tra le norme euclidee degli scarti a due iterazioni successive e la velocità di convergenza come `-log10` di tale rapporto

- ➠ stampa della soluzione che approssima la soluzione del sistema per quel valore di ω;
- ➠ incremento di ω $\omega \leftarrow \omega + \Delta\omega$.

✎ Fine ciclo su ω (fine ciclo `DO WHILE`)

✎ Chiusura dei files di input e otput

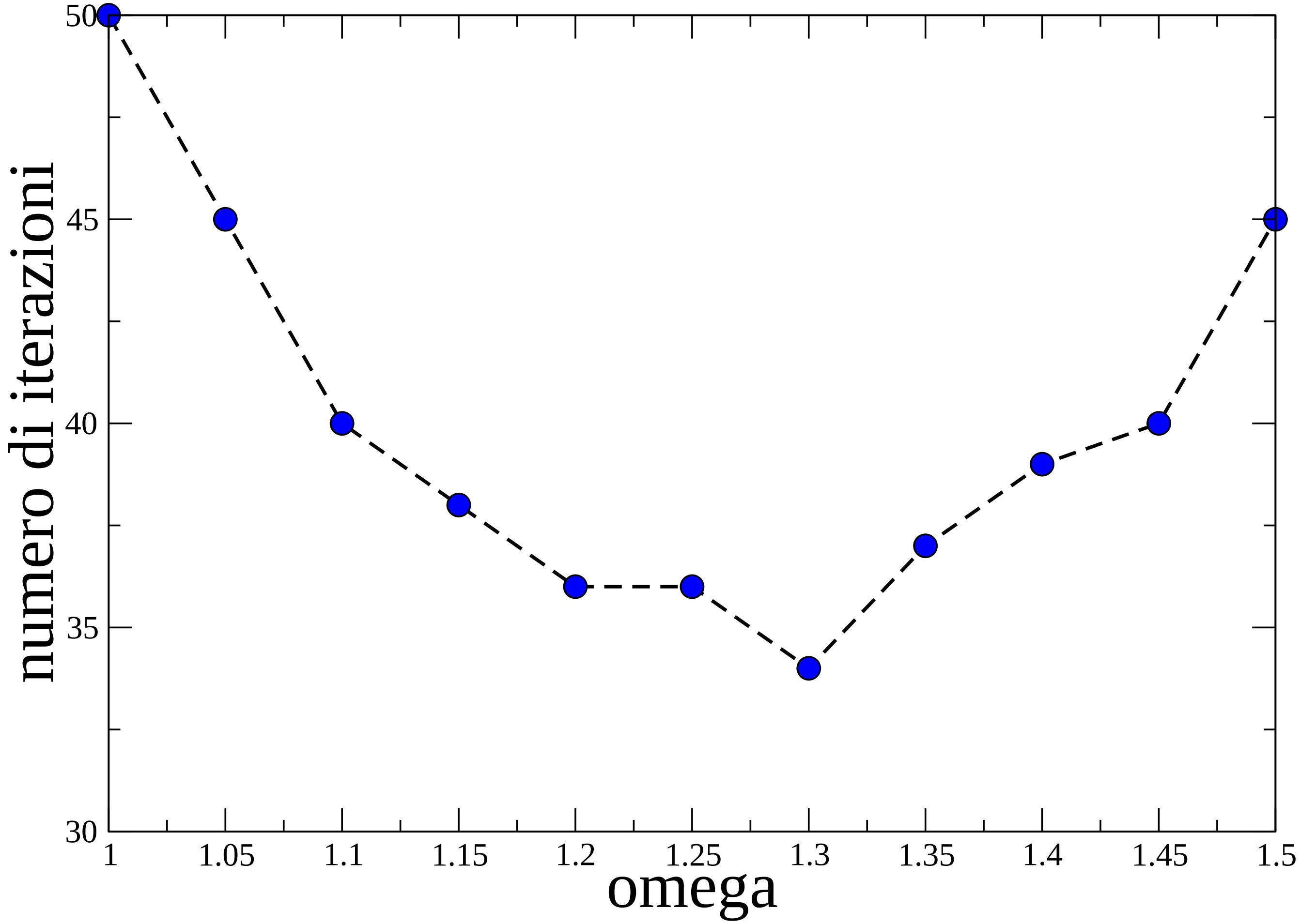
✎ Fine del programma

Grafico ω/ `iter`

Per ogni valore di ω, in base alla stampa dei risultati ottenuti dal programma, conosciamo il numero di iterazioni che sono state necessarie per arrivare a convergenza. Possiamo allora costruire un grafico (per esempio utilizzando Office) dove, sull'asse delle ascisse poniamo il valore di ω e sull'asse delle ordinate il corrispondente numero di iterazioni per arrivare a convergenza.

In tal modo possiamo ricavare il valore di ω_{opt}, cioè il valore di ω che dà la soluzione del sistema con il minor numero di iterazioni.

ESEMPIO di stima dell'omega ottimale



Stima di $\lambda_{1,S}$

Dobbiamo stimare la costante asintotica di convergenza $\lambda_{1,S}$ del metodo di Seidel utilizzando gli scarti.

NON DOBBIAMO FARE UN ALTRO PROGRAMMA FORTRAN SUL METODO DI SEIDEL

RICORDIAMO: per $\omega = 1$ il metodo SOR COINCIDE con il metodo di SEIDEL

$\lambda_{1,S}$, l'autovalore dominante della matrice associata al metodo di Seidel viene già ricavato nella tabellina dei risultati intermedi, per $\omega = 1$, come rapporto tra le norme euclidee degli scarti a due iterazioni successive. Quindi il programma ci dà già questo risultato.

Nell'esercitazione, viene richiesto di calcolare $\lambda_{1,S}$ anche per via grafica, riportando in un grafico semilogaritmico la norma euclidea degli scarti in funzione delle iterazioni e utilizzando la pendenza della retta per ricavare $\lambda_{1,S}$.

Data E la matrice di iterazione del metodo (in questo caso, di Seidel), e chiamato con $\mathbf{d}_{k+1}$ il vettore degli scarti, $\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$, sappiamo che si ha:

$$\mathbf{x}_{k+1} = E\mathbf{x}_k + \mathbf{q}$$

$$\mathbf{x}_k = E\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{q}$$

sottraendo

$$\mathbf{d}_{k+1} = E\mathbf{d}_k = EE\mathbf{d}_{k-1} = E^2\mathbf{d}_{k-1} = \cdots = E^{k+1}\mathbf{d}_0$$

Scrivendo $\mathbf{d}_0$ come combinazione lineare degli autovettori di E, $\mathbf{d}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$, si ha:

$$\mathbf{d}_{k+1} = E^{k+1}\mathbf{d}_0 = \lambda_1^{k+1}c_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2^{k+1}c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n^{k+1}c_n\mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{d}_{k+1} \approx \lambda_1^{k+1}c_1\mathbf{v}_1$$

o, equivalentemente,

$$\mathbf{d}_k \approx \lambda_1^{k}c_1\mathbf{v}_1$$

Considerando la norma euclidea e passando ai logaritmi:

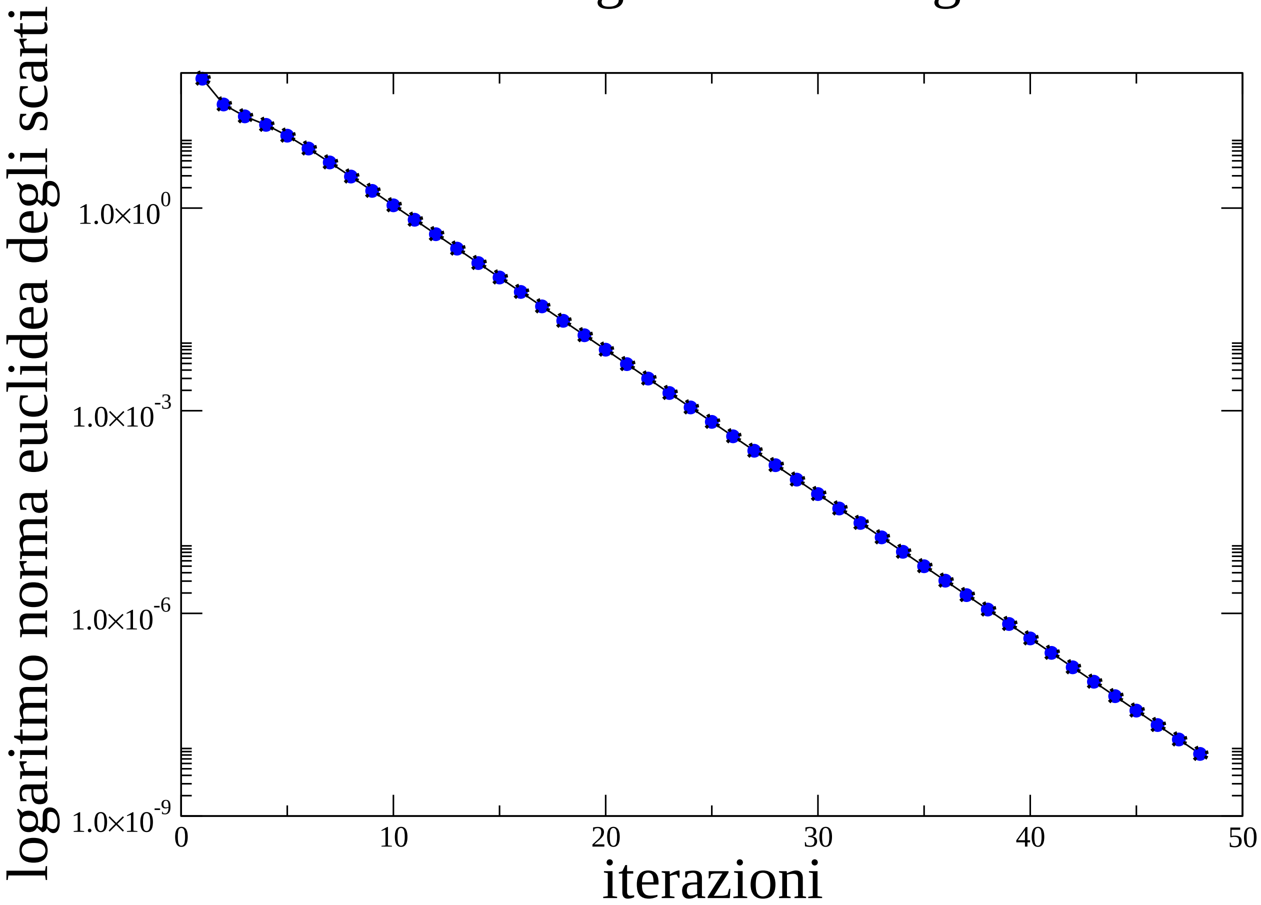
$$\log_{10}\|\mathbf{d}_k\| = k\log_{10}|\lambda_1| + \mathit{costante}$$

Il grafico semilogaritmico riporta, dunque, sull'asse delle ascisse le iterazioni k e sull'asse delle ordinate il logaritmo della norma euclidea degli scarti.

La pendenza di questo grafico è $\log_{10}|\lambda_1|$ cioè l'opposto della velocità asintotica di convergenza del metodo di Seidel.

Dalla pendenza possiamo calcolare il modulo delll'autovalore $|\lambda_1| = |\lambda_{1,s}|$

ESEMPIO di grafico semilogaritmico



Quindi noi ricaviamo il valore di $\lambda_{1,S}$ in due modi: mediante l'output del programma FORTRAN e mediante questo grafico.

Calcolo di ω_{opt}

Il calcolo di $\lambda_{1,S}$ ci serve per calcolare ω_{opt} mediante la formula

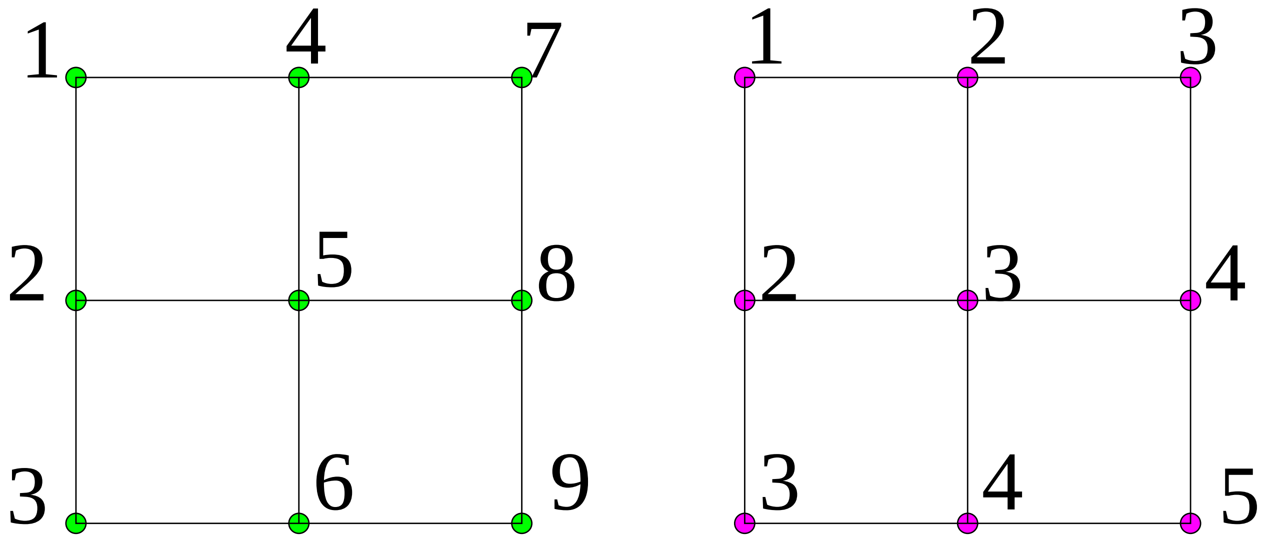
$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - |\lambda_{1,S}|}}$$

Questa formula vale quando la matrice A gode di proprietà A ed è coerentemente ordinata.

Nel nostro caso:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

La numerazione dei nodi del reticolo (figura a sinistra) e le corrispondenti componenti del vettore di ordinamento q (figura a destra), ci dicono che la matrice A gode di proprietà A e coerente ordinamento (S è dato dai nodi dispari 1-3-5-7-9 e T dai nodi pari 2-4-6-8)



Possiamo applicare la formula per l'ω_{opt} e confrontare tale valore con quello calcolato numericamente.