Calcolo Numerico
Ingegneria Meccanica (sede di Vicenza)
Esame - 29 agosto 2006

1. Si vuole risolvere l'equazione $x = g(x)$ con lo schema del punto fisso; sapendo che
$$g(x) = x^2 - 5x + 9$$
   a) calcolare analiticamente il valore del punto fisso;
   b) determinare il fattore di convergenza M dello schema del punto fisso;
   c) calcolare le approssimazioni x_1, x_2 e x_3 partendo prima da $x_0 = 1$ e poi da $x_0 = 2.5$ e giustificandone il diverso comportamento.

2. Sia data la tabella seguente:

x_i	0	0.1	0.8	1.2
$f(x_i)$	1	0.48	1.32	5.32

   a) Scrivere la tabella delle differenze divise.
   b) Usando i quattro punti in successione, scrivere i polinomi interpolanti (di Newton) $p_n(x)$ di grado non superiore ad n (con n=0,1,2,3); commentare il risultato.
   c) Usando $p_n(x)$ stimare, per ogni n, $f(0.6)$ e $f'(0.6)$.
   d) scrivere il polinomio $p_2(x)$ con la formula di Lagrange.

3. Dato l'integrale
$$I = \int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$
   a) si approssimi I con i valori Q_1 e Q_2 ottenuti applicando il metodo di Cavalieri-Simpson prima a tutto l'intervallo e poi suddividendo l'intervallo in due parti uguali;
   b) si approssimi I usando la formula di estrapolazione di Richardson;
   c) dopo aver calcolato analiticamente il valore esatto di I, determinare l'errore esatto commesso con l'estrapolazione di Richardson.

4. Metodi iterativi per la soluzione di sistemi lineari: ricavare le condizioni generali di convergenza, e descrivere il fattore e la velocità di convergenza di un metodo iterativo. Descrivere il metodo di Gauss-Seidel.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti

1. È data l'equazione

$$g(x) = x^2 - 5x + 9$$

a) ξ è punto fisso della funzione g se verifica $g(\xi) = \xi$.
Imponiamo dunque la condizione $g(\xi) = \xi$. Ricaviamo $\xi^2 - 5\xi + 9 = \xi$, ovvero $\xi^2 - 6\xi + 9 = 0$, cioè $(\xi - 3)^2 = 0$, da cui $\xi = 3$ è punto fisso della g.

b) Il fattore di convergenza è $M = g'(\xi)$.
Poichè $g'(x) = 2x - 5$, si ha $g'(\xi) = g'(3) = 1$.
Osserviamo che, a priori, non si può dire se lo schema del punto fisso converge o meno proprio perchè nel punto fisso la derivata prima vale esattamente 1, ma bisogna vedere caso per caso a seconda del punto iniziale da cui si fa partire il metodo.

c) Sia $x_0 = 1$. Si ha

k	x_k	$g(x_k)$
0	1	5
1	5	9
2	9	45
3	45	1809

Sia $x_0 = 2.5$. Si ha

k	x_k	$g(x_k)$
0	2.5	2.75
1	2.75	2.8125
2	2.8125	2.84765625
3	2.84765625	2.870864868

Per $x_0 = 1$ il metodo non converge, mentre per $x_0 = 2.5$ il metodo converge. La diversità di comportamento è dovuto al fatto che $|g'(1)| = |-3| > 1$ mentre $|g'(2.5)| = |0| < 1$.
Nel primo caso partiamo da un punto in cui la derivata prima di g è maggiore di 1 in modulo per cui i valori ottenuti dallo schema si allontanano sempre più dal punto fisso.
Nel secondo caso partiamo da un punto in cui la derivata prima di g è minore di 1 e quindi i valori della successione dello schema del punto fisso si avvicinano sempre più al punto fisso stesso.

2. È data la tabella:

x_i	0	0.1	0.8	1.2
$f(x_i)$	1	0.48	1.32	5.32

a) La tabella delle differenza divise è:

x_i	$f(x_i)$	$f(\cdot,\cdot)$	$f(\cdot,\cdot,\cdot)$	$f(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$
0	1			
0.1	0.48	$\dfrac{0.48-1}{0.1} = -5.2$		
0.8	1.32	$\dfrac{1.32-0.48}{0.7} = 1.2$	$\dfrac{1.2+5.2}{0.8} = 8$	
1.2	5.32	$\dfrac{5.32-1.32}{0.4} = 10$	$\dfrac{10-1.2}{1.1} = 8$	$\dfrac{8-8}{1.2} = 0$

b) Il polinomio di Newton di grado 0 è dunque

$$p_0(x) = 1$$

Il polinomio di Newton di grado 1 è

$$p_1(x) = 1 - 5.2x$$

Il polinomio di Newton di grado 2 è

$$p_2(x) = 1 - 5.2x + 8x(x - 0.1) = 8x^2 - 6x + 1$$

Il polinomio di Newton di grado 3 è

$$p_3(x) = 1-5.2x+8x(x-0.1)+0x(x-0.1)(x-0.8) = 1-5.2x+8x(x-0.1) = p_2(x)$$

Il polinomio $p_3(x)$ coincide con $p_2(x)$ in quanto $p_2(x_3) = p_2(1.2) = f(1.2) = f(x_3)$ cioè il polinomio di grado 2 interpola non solo i dati $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ ma anche $(x_3, f(x_3))$.

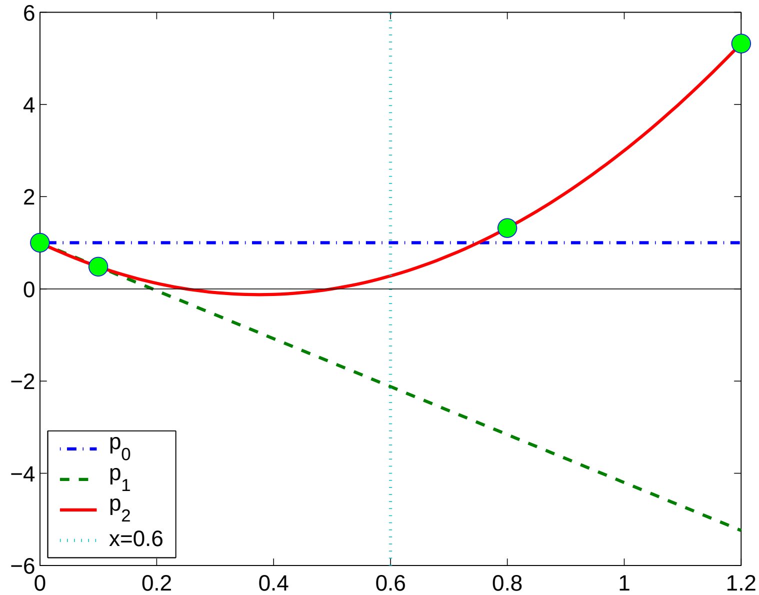
c) Per le derivate di $p_n(x)$, $n = 0,1,2$ si ha

$$p_0'(x) = 0$$
$$p_1'(x) = -5.2$$
$$p_2'(x) = 16x - 6$$

La stima di $f(0.6)$ e $f'(0.6)$ è:

n	$p_n(0.6)$	$p_n'(0.6)$
0	1	0
1	-2.12	-5.2
2	0.28	3.6

Il grafico riporta le tre curve con i dati di interpolazione.



d) I polimoni di Lagrange per ricavare il polinomio p_2 sono dati considerando i valori x_0, x_1 e x_2:

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-0.1)(x-0.8)}{(-0.1)(-0.8)} \\
&= \frac{x^2-0.9x+0.08}{0.08} \\
L_1(x) &= \frac{x(x-0.8)}{0.1(0.1-0.8)} \\
&= \frac{x^2-0.8x}{-0.07} \\
L_2(x) &= \frac{x(x-0.1)}{0.8(0.8-0.1)} \\
&= \frac{x^2-0.1x}{0.56}
\end{aligned}
$$

Il polinomio è:

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= 1L_0(x) + 0.48L_1(x) + 1.32L_2(x) \\
&= \frac{x^2-0.9x+0.08}{0.08} - 0.48\frac{x^2-0.8x}{0.07} + 1.32\frac{x^2-0.1x}{0.56} \\
&= 12.5(x^2-0.9x+0.08) - 6.857142857(x^2-0.8x) + 2.357142857(x^2-0.1x)
\end{aligned}
$$

e raccogliendo i termini

$$p_2(x) = 8x^2 - 6x + 1$$

Lasciando invece i termini sotto forma frazionaria, abbiamo

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= 1L_0(x) + 0.48L_1(x) + 1.32L_2(x) \\
&= \frac{x^2 - 0.9x + 0.08}{0.08} - 0.48\frac{x^2 - 0.8x}{0.07} + 1.32\frac{x^2 - 0.1x}{0.56} \\
&= \frac{100}{8}(x^2 - \frac{9}{10}x + \frac{8}{100}) - \frac{48}{7}(x^2 - \frac{8}{10}x) + \frac{132}{56}(x^2 - \frac{1}{10}x) \\
&= \frac{25}{2}(x^2 - \frac{9}{10}x + \frac{2}{25}) - \frac{48}{7}(x^2 - \frac{4}{5}x) + \frac{33}{14}(x^2 - \frac{1}{10}x)
\end{aligned}
$$

e raccogliendo i termini

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= (\frac{25}{2} - \frac{48}{7} + \frac{33}{14})x^2 - (\frac{25}{2}\frac{9}{10} - \frac{48}{7}\frac{4}{5} + \frac{33}{14}\frac{1}{10})x + \frac{25}{2}\frac{2}{25} \\
&= \frac{7 \cdot 25 - 2 \cdot 48 + 33}{14}x^2 - \frac{7 \cdot 225 - 4 \cdot 192 + 33}{140}x + 1 \\
&= \frac{175 - 96 + 33}{14}x^2 - \frac{1575 - 768 + 33}{140}x + 1 \\
&= \frac{112}{14}x^2 - \frac{840}{140}x + 1 \\
&= 8x^2 - 6x + 1
\end{aligned}
$$

3. Consideriamo l'integrale

$$
I = \int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, \mathrm{d}x
$$

L'intervallo di integrazione è dunque $[0, 0.5]$, per cui poniamo $a = 0$ e $b = 0.5$.

a) Applichiamo la formula di Cavalieri-Simpson su tutto l'intervallo, considerando che l'ampiezza dell'intervallo $b - a = 0.5$

$$
Q_1 = \frac{0.5}{6}(f(0) + 4f(0.25) + f(0.5)) = 0.523823565
$$

Si ha, infatti, $f(0) = 1$, $f(0.25) = 1.03279556$ e $f(0.5) = 1.15470054$.
Quando applichiamo la formula suddividendo l'intervallo di integrazione in due parti uguali, consideriamo che l'ampiezza del singolo sottointervallo vale ora $2h = 0.25$. Il primo sottointervallo è di estremi $[0, 0.25]$ e ha il punto centrale uguale a 0.125, mentre il secondo sottointervallo è $[0.25, 0.5]$ con punto centrale uguale a 0.375. Abbiamo quindi i punti: $x_0 = a = 0$, $x_1 = 0.125$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 0.375$, e $x_4 = b = 0.5$. I punti con numerazione dispari sono i punti centrali di ogni sottointervallo mentre quelli con numerazione pari sono gli estremi di ciascun sottointervallo.
La formula da applicare, quindi, è (ricordiamo che $\frac{2h}{6} = \frac{h}{3}$):

$$
Q_2 = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + f(b)) = 0.523616326
$$

dove $f(x_1) = 1.00790526$, $f(x_3) = 1.07871978$ (essendo già in possesso degli altri valori, calcolati per Q_1).

b) La formula di estrapolazione di Richardson è:

$$Q_3 = Q_2 + \frac{Q_2 - Q_1}{15}$$

da cui ricaviamo $Q_3 = 0.5236025101$

d) Analiticamente l'integrale esatto è:

$$I = \int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x|_0^{0.5} = \arcsin 0.5 - \arcsin 0 = \pi/6 - 0 = 0.523598775$$

Quindi l'errore esatto commesso con l'estrapolazione di Richardson è: $|I - Q_3| = 3.7351 \cdot 10^{-6}$.