Calcolo Numerico
Ingegneria Meccanica (sede di Vicenza)
Esame - 20 settembre 2006

1. Data l'equazione $f(x) = \ln x + x^2 - x = 0$,

   a) si provi, anche solo graficamente, che l'equazione ammette l'unica radice $\xi = 1$ nell'intervallo $[0.7, 2.3]$;

   b) si applichino due iterazioni del metodo dicotomico (o delle bisezioni) a partire dall'intervallo dato, chiamando con x_0 l'ultimo valore ottenuto con tale metodo;

   c) a partire da x_0 del punto b) si calcoli l'approssimazione x_1 con il metodo di Newton-Raphson;

   d) a partire da x_0 e x_1 del punto c) si calcolino le approssimazioni x_2 e x_3 con il metodo della Regula Falsi;

   e) considerata la radice esatta $\xi = 1$, si calcoli la costante asintotica di convergenza del metodo della Regula Falsi.

2. Sia dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 30 \\ 34 \\ 7 \end{pmatrix}$$

   a) Provare che gli schemi di Jacobi e di Seidel convergono e calcolare la velocità asintontica di convergenza di entrambi gli schemi.

   b) A partire dallo stesso vettore iniziale $\mathbf{x}_0 = (0\ 0\ 0)^T$, calcolare le approssimazioni $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ che si ottengono applicando lo schema di Jacobi e lo schema di Seidel.

3. Sia dato l'integrale $I = \displaystyle\int_{-2}^{0} e^{-x}(x+1)\ \mathrm{d}x$.

   a) Approssimare il valore dell'integrale applicando la formula dei trapezi con $n = 5$ suddivisioni in parti uguali dell'intervallo di integrazione.

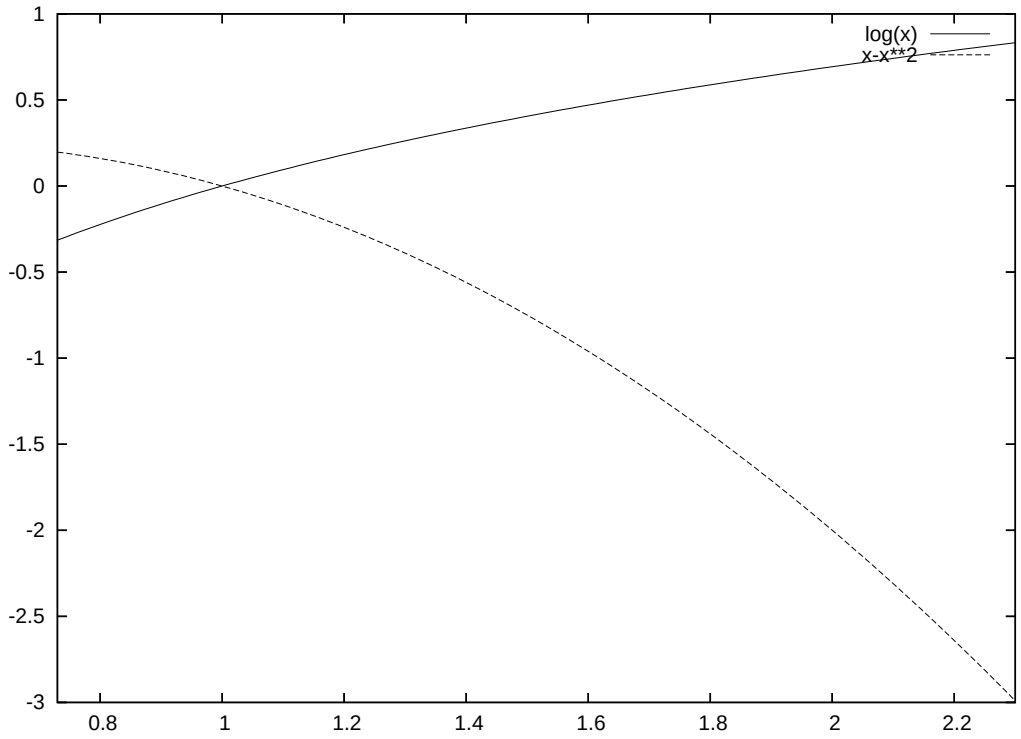
   b) Trovare una maggiorazione dell'errore commesso e, dopo aver calcolato analiticamente l'integrale esatto, confrontare tale stima con l'errore esatto.

4. Interpolazione di Lagrange. Formula del resto.

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti

1. È data l'equazione $f(x) = \ln x + x^2 - x = 0$

   a) Da $f(x) = 0$ si ricava $\ln x = x - x^2$, per cui graficamente si ha



   Le due curve si intersecano in un solo punto, che vale $\xi = 1$.
   Analiticamente, invece, la funzione $f(x)$ assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo dato:

$$f(0.7) = -0.566674943938732$$
$$f(2.3) = 3.8229091229351$$

   Inoltre f è continua, quindi ammette almeno una radice nell'intervallo dato. La derivata prima è: $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 1$, che possiamo anche scrivere come $f'(x) = \frac{1 + 2x^2 - x}{x}$: numeratore e denominatore sono entrambi sempre positivi nell'intervallo dato, (l'equazione $2x^2 - x + 1 = 0$ ha radici nel campo complesso $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{4}$ e quindi l'equazione è sempre positiva). Di conseguenza $f'(x)$ è una funzione positiva, f è crescente e ammette un'unica radice.

   b) Applichiamo il metodo delle bisezioni a partire dall'intervallo dato (utilizziamo la notazione x_s per indicare l'estremo sinistro dell'intervallo, x_d per indicare l'estremo destro dell'intervallo, x_c, il punto medio dell'intervallo considerato):

iter.	x_s	$f(x_s)$	segno	x_d	$f(x_d)$	segno	x_c	$f(x_c)$
1	0.7	-0.566674944	-	2.3	3.822909123	+	1.5	1.155465108
2	0.7	-0.566674944	-	1.5	1.155465108	+	1.1	0.205310180

Il valore x_0 è dunque $x_0 = 1.1$.

c) Il metodo di Newton-Rapshon è $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ dove $f' = 1/x + 2x - 1$.

Partendo da $x_0 = 1.1$, si ricava $x_1 = 1.1 - \dfrac{0.20531018}{2.1090909} = 1.002654656$

d) Il metodo della Regula Falsi è $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{C_k}$, con $C_k = \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$.

Si ha:

k	x_k	$f(x_k)$	C_k
1	1.002654656	0.5312842078E-02	0.2054513650E+01
2	1.000068720	0.1374413812E-03	0.2001364094E+01
3	1.000000046		

e) Considerato che la radice esatta è $\xi = 1$, la costante asintotica di convergenza della Regula Falsi si calcola utilizzando l'espressione $M = |\dfrac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}|^{0.618}$.

Da $f'(x) = \dfrac{1}{x} + 2x - 1$ segue $f'(1) = 2$ e $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} + 2$, da cui $f''(1) = 1$, per cui $M = \dfrac{1}{4}^{0.618} = 0.4245481$.

2. È dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 30 \\ 34 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) La matrice A non è diagonalmente dominante per righe in quanto, sulla seconda riga, non vale la relazione $5 > 7$. Alla stessa maniera, non è diagonalmente dominante per colonne in quanto, sulla terza colonna, non vale la relazione $5 > 6$. Quindi non possiamo usare il criterio di matrice diagonalmente dominante per provare la convergenza dei due metodi.

Tuttavia, la matrice A è biciclica e coerentemente ordinata, in quanto si può scomporre come

$$\begin{array}{c|cc} 8 & 2 & 6 \\ \hline 7 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}$$

Quindi se proviamo che lo schema di Jacobi converge, cioè che l'autovalore dominante della matrice di Jacobi è in modulo minore di 1, allora, poichè per matrici bicicliche e coerentemente ordinate vale $\mu^2 = \lambda$, dove λ è l'autovalore dominante della matrice di Seidel, allora anche il metodo di Seidel convergerà alla soluzione.

Infatti da $\mu < 1$ segue $\mu^2 < 1$, quindi l'asserto è provato.
Dobbiamo perciò verificare che la matrice di Jacobi ha autovalori in modulo minori di 1.
La matrice di Jacobi è $E_J = I - D^{-1}A$, cioè

$$E_J = \begin{pmatrix} 0 & -2/8 & -6/8 \\ -7/5 & 0 & 0 \\ -1/5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & -3/4 \\ -7/5 & 0 & 0 \\ -1/5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo porre uguale a zero $\det(E_J - \mu I)$.

$$\begin{vmatrix} -\mu & -1/4 & -3/4 \\ -7/5 & -\mu & 0 \\ -1/5 & 0 & -\mu \end{vmatrix} = -\mu^3 + \frac{3}{4}\frac{1}{5}\mu + \frac{1}{4}\frac{7}{5}\mu = 0$$

Si ha: $0 = \det(E_J - \mu I) = -\mu^3 + (\frac{3}{20} + \frac{7}{20})\mu$,
Una radice è dunque $\mu = 0$, e le altre due radici sono $\mu = \pm\sqrt{1/2} = \pm\sqrt{0.5} = 0.707106781$.
Gli autovalori sono tutti reali e quello dominante è $\mu = 0.707106781 < 1$.
C'è, dunque, convergenza per il metodo di Jacobi.
Poichè per Seidel vale $\lambda = \mu^2 = 0.5$, si ha convergenza anche per Seidel.
Le velocità di convergenza valgono

$$R_J = -\log_{10}(\mu) = 0.1505149$$
$$R_S = -\log_{10}(\lambda) = 0.301029995 = -\log_{10}(\mu^2) = 2R_J$$

b) Lo schema di Jacobi è:

$$\begin{cases} x^1_{k+1} = \frac{1}{8}(30 - 2x^2_k - 6x^3_k) \\ x^2_{k+1} = \frac{1}{5}(34 - 7x^1_k) \\ x^3_{k+1} = \frac{1}{5}(7 - x^1_k) \end{cases}$$

Partendo dal vettore $\mathbf{x}_0$ con componenti tutte nulle, abbiamo

k	x^1_k	x^2_k	x^3_k
0	0	0	0
1	3.75	6.8	1.4
2	1.0	1.55	0.65

(Per curiosità, per arrivare a convergenza con una tolleranza pari a 10^{-9} occorrono 68 iterazioni.)

Lo schema di Seidel è:

$$\begin{cases} x^1_{k+1} = \dfrac{1}{8}(30 - 2x^2_k - 6x^3_k) \\ x^2_{k+1} = \dfrac{1}{5}(34 - 7x^1_{k+1}) \\ x^3_{k+1} = \dfrac{1}{5}(7 - x^1_{k+1}) \end{cases}$$

Partendo dal vettore $\mathbf{x}_0$ con componenti tutte nulle, abbiamo

k	x^1_k	x^2_k	x^3_k
0	0	0	0
1	3.75	1.55	0.65
2	2.875	2.775	0.825

(con la stessa tolleranza 10^{-9}, occorrono 33 iterazioni perchè Seidel arrivi a convergenza). La soluzione esatta è il vettore $\mathbf{x} = (2 \;\; 4 \;\; 1)^T$.

3. Dobbiamo risolvere l'integrale $I = \int_{-2}^{0} e^{-x}(x+1)\ \mathrm{d}x$.

   a) Applichiamo la formula dei trapezi con $n = 5$ suddivisioni dell'intervallo dato. Vale, dunque, $h = 0.4$. I punti da considerare e il valore della $f(x) = e^{-x}(x+1)$, sono:

i	x_i	$f(x_i)$
0	-2	-7.3890561
1	-1.6	-2.97181945
2	-1.2	-0.664023385
3	-0.8	0.445108186
4	-0.4	0.895094819
5	0	1

   La formula dei trapezi è

$$I_{trap} = h(\frac{f(x_0) + f(x_5)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)) = -2.19606715$$

   b) Per calcolare una maggiorazione dell'errore commesso, dobbiamo calcolare la derivata seconda della f.
   Da $f(x) = e^{-x}(x+1)$ segue $f'(x) = -e^{-x}(x+1) + e^{-x} = -e^{-x}x$ e $f''(x) = e^{-x}x - e^{-x} = e^{-x}(x-1)$.
   La $f''(x)$ è di segno negativo e crescente, con $f''(-2) = -22.1671682968$ e $f''(0) = -1$. A noi interessa il massimo in valore assoluto della f'', quindi $M = \max|f''(x)| = |f''(-2)|$.
   Si ha: $|E_{trap}| \leq M\dfrac{|(b-a)^3|}{12 \cdot 5^2} = 0.591124488$

Analiticamente, è facile calcolare l'integrale esatto (per parti):

$$I = \int_{-2}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x = -e^{-x}(x+1)|_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} e^{-x}\ \mathrm{d}x$$

$$I = \int_{-2}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x = -e^{-x}(x+2)|_{-2}^{0} = e^{-2}(0) - e^{0}(2) = -2$$

Quindi l'errore esatto è: $|I - I_{trap}| = 0.196067154$, un valore minore della maggiorazione trovata prima.