Calcolo Numerico
Ingegneria Meccanica (sede di Vicenza)
II compitino - 20 giugno 2006
Esame - 20 giugno 2006

1. Provare, anche solo graficamente, che l'equazione

$$f(x) = \sin x + x - 1 = 0$$

   ammette una sola radice ξ nell'intervallo $[0, 1]$.

   a) Dire se lo schema del punto fisso con $g(x) = \arcsin(1 - x)$ può convergere.
   b) Partendo da $x_0 = 0.1$ calcolare le approssimazioni x_1, x_2 e x_3 con lo schema di Newton-Raphson;
   c) Dare una stima del fattore di convergenza.

2. Sia dato l'integrale

$$\int_0^2 \frac{2}{x-4}\, \mathrm{d}x$$

   a) Dare una sua approssimazione con la formula dei trapezi e $n = 4$ suddivisioni in parti uguali dell'intervallo di integrazione.
   b) Trovare una maggiorazione dell'errore commesso.
   c) Confrontare l'errore esatto con la stima precedentemente trovata.
   d) Dire in quanti sottointervalli occorre suddividere l'intervallo di integrazione per ottenere una maggiorazione dell'errore minore della tolleranza $\epsilon = 10^{-5}$.

3. Sia assegnato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1.5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 4 \\ 4.5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

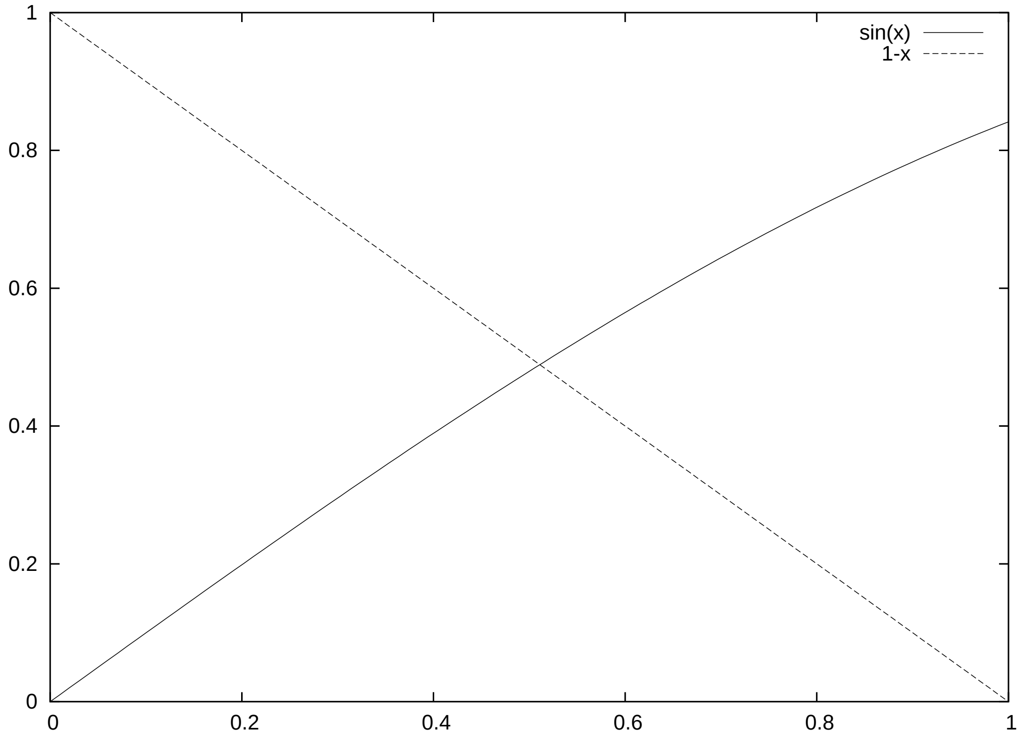
   a) Dire se il metodo di Gauss-Seidel converge fornendo un'adeguata spiegazione;
   b) A partire dal vettore iniziale $\mathbf{x}_0 = (0\ 0\ 0\ 0)^T$, calcolare le approssimazioni $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ e $\mathbf{x}_4$.
   c) Stimare la costante asintotica dell'errore (o fattore di convergenza)

4. Approssimazione ai minimi quadrati: descrivere la retta $y = a_0 + a_1 x$ di regressione lineare ai minimi quadrati

---

Tempo a disposizione per il II compitino: 1 ora e 45 minuti
Tempo a disposizione per l'esame: 2 ore e 15 minuti
IMPORTANTE: Chi sostiene il II compitino deve rispondere ai quesiti 2., 3. e 4.

1. Graficamente, da $f(x) = 0$ si ha $\sin x = 1 - x$. Studiamo l'intersezione delle due curve, $\sin x$ e $1 - x$ nell'intervallo $[0, 1]$.



Dal grafico si osserva una sola intersezione, cioè una sola radice della f.

Analiticamente, la funzione $f(x)$ assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo dato:

$$f(0) = \sin 0 + 0 - 1 = -1$$
$$f(1) = \sin 1 + 1 - 1 = 0.8414709848$$

La derivata prima della f è $f' = \cos x + 1$: è funzione continua e sempre positiva nell'intervallo $[0, 1]$. Quindi f è una funzione crescente e interseca l'asse delle x solo una volta in $[0, 1]$, vale a dire ammette un'unica radice.

a) Da $f(x) = 0$ si ha $\sin x + x - 1 = 0$ o, equivalentemente, $\sin x = 1 - x$, da cui $x = \arcsin(1 - x)$.

Consideriamo perciò lo schema del punto fisso con $g(x)$ data da $g(x) = \arcsin(1 - x)$. La derivata di $g(x)$ è $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (1 - x)^2}}$.

Nell'intervallo $[0, 1]$ valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
0 &\leq x \leq 1 \\
0 &\geq -x \geq -1 \\
1 &\geq 1 - x \geq 0 \\
1 &\geq (1 - x)^2 \geq 0 \\
-1 &\leq -(1 - x)^2 \leq 0 \\
0 &\leq 1 - (1 - x)^2 \leq 1 \\
0 &\leq \sqrt{1 - (1 - x)^2} \leq 1 \\
1 &\leq \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - x)^2}}
\end{aligned}$$

Perciò $g'(x)$ è sempre maggiore di 1 e lo schema del punto fisso non può convergere.

b) Da $f(x) = \sin x + x - 1$ si ha $f'(x) = \cos x + 1$ e $f''(x) = -\sin x$. Il metodo di Newton-Raphson è:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\sin x + x - 1}{\cos x + 1}.$$

Utilizziamo la notazione M1 e M2 per indicare la stima della costante asintotica dell'errore mediante le formule

$$M1 = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k - x_{k-1}|^2}$$

$$M2 = \frac{|f''(x_k)|}{2|f'(x_k)|}$$

Partendo da $x_0 = 0.1$ si ottiene la seguente tabella:

Tabella 1: Metodo di Newton-Raphson

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$	M1	M2
0	0.1	-0.80016658E+00	0.19950042E+01	-	-	0.12795998E+00
1	0.50108517E+00	-0.18537249E-01	0.18770618E+01	0.40108517E+00	-	0.13059395E+00
2	0.51096084E+00	-0.23565955E-04	0.18722750E+01	0.98756733E-02	0.61389417E-01	0.13059731E+00
3	0.51097343E+00	-0.38737166E-10	-	0.12586802E-04	0.12905712E+00	0.13059731E+00

c) La stima del fattore di convergenza è dato da $M1 = 0.12905712E + 00$ o da $M2 = 0.13059731E + 00$, a seconda della strada scelta per dare la stima.

2. a) Suddividendo l'intervallo di integrazione $[0, 2]$ in $n = 4$ parti si trova un passo $h = 2/4 = 1/2 = 0.5$.

La formula dei trapezi è:

$$\begin{aligned} I_{trap} &= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right) \\ &= 0.5\left(\frac{f(0)+f(2)}{2} + f(0.5) + f(1) + f(1.5)\right) \\ &= 0.5\left(\frac{-0.5-1}{2} - 0.571428571 - 0.666666667 - 0.8\right) \\ &= -1.39404762 \end{aligned}$$

b) Consideriamo la formula dell'errore: $E = -\dfrac{f''(\xi)}{12}\dfrac{(b-a)^3}{n^2}$

Da $f(x) = \dfrac{2}{x-4}$ segue $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-4)^2}$ e $f''(x) = \dfrac{4}{(x-4)^3}$.

Per maggiorare l'errore dobbiamo considerare

$$|E| \leq \frac{\max_{0\leq x\leq 2} |f''(x)|}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}$$

e, quindi, dobbiamo calcolare $M = \max_{0\leq x\leq 2} |f''(x)|$.

La funzione $(x-4)^3$ è continua, crescente e sempre negativa nell'intervallo $[0, 2]$. Quindi $|(x-4)^3| = -(x-4)^3$ è di segno positivo in $[0, 2]$ e decrescente. Segue che $|f''(x)| = \dfrac{-4}{(x-4)^3}$ è una funzione crescente e il suo massimo è assunto in $x = 2$.

Perciò $M = \max_{0\leq x\leq 2} |f''(x)| = |f''(2)| = \dfrac{-4}{-2^3} = 1/2 = 0.5$.

Si ha allora la maggiorazione dell'errore $|E| \leq \dfrac{M}{12}\dfrac{2^3}{4^2} = \dfrac{1}{48} = 0.0208333333$

c) L'integrale esatto si calcola facilmente:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \frac{2}{x-4}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-4|\|_0^2 = 2\ln|-2| - 2\ln|-4| \\ &= 2(\ln 2 - \ln 4) = 2\ln 1/2 = \ln 1/4 = -1.386294361 \end{aligned}$$

L'errore esatto commesso con la formula dei trapezi è $|I - I_{trap}| = 0.00775325793$

d) Perchè la maggiorazione dell'errore sia minore della tolleranza $\epsilon = 10^{-5}$ deve essere

$|E| \leq \dfrac{M}{12}\dfrac{2^3}{n^2} \leq 10^{-5}$

cioè

$$n^2 \geq \frac{M}{12} 2^3 10^5 = \frac{10^5}{3} = 33333.333333$$

Quindi $n > 182.574186$, ovverosia $n = 183$.

3. a) La matrice A ha predominanza diagonale in senso stretto per righe ed è riducibile, perciò il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

La predominanza diagonale in senso stretto è banale, considerato che $|4| > |-1| + |-1.5|$ (prima riga), $|2| > 0$ (seconda riga), $|3| > |1| + |-1.5|$ (terza riga), $|5| > |2| + |-1|$ (quarta riga).

La matrice è riducibile in quanto la seconda riga del sistema lineare è costituita dal solo elemento della diagonale principale (nel sistema lineare si ha, per la seconda equazione, $2x_2 = 4$, da cui si ricava direttamente $x_2 = 2$) per cui, con opportuni scambi di righe e di colonne, la matrice può essere messa sotto la forma $\begin{pmatrix} P & Q \\ \emptyset & R \end{pmatrix}$.

Basta, infatti, scambiare la seconda e la quarta riga di A e, successivamente, la seconda e quarta colonna della matrice per vedere la matrice riducibile:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1.5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio } 2^a \text{ e } 4^a \text{ riga}} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1.5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ -1.5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio } 2^a \text{ e } 4^a \text{ colonna}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1.5 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ -1.5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Esplicitando la variabile $x_2 = 2$ nel sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ottengo dunque un sistema 3x3 del tipo $A'\mathbf{y} = \mathbf{b}'$ dove

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & -1.5 & 0 \\ -1.5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 4.5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Il significato delle componenti di $\mathbf{y}$ è $y_1 = x_1$, $y_2 = x_3$, $y_3 = x_4$.

La matrice A' è tridiagonale e quindi gode della proprietà A ed è coerentemente ordinata (oltre ad essere strettamente diagonalmente dominante) per cui il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema ridotto è convergente.

Lo schema di Gauss-Seidel, componente per componente è:

$$y_{k+1}^{(1)} = \frac{1}{4}(1.5 y_k^3 + 2.5)$$
$$y_{k+1}^{(2)} = \frac{1}{3}(1.5 y_{k+1}^{(1)} - y_k^3 + 4.5)$$
$$y_{k+1}^{(3)} = \frac{1}{5}(y_{k+1}^{(2)} + 14)$$

Partendo da $\mathbf{y}_0 = (0,0,0)^T$ si ricava:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 0.625 \\ 1.8125 \\ 3.1625 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 1.304688 \\ 1.098177 \\ 3.019635 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} 1.036816 \\ 1.011863 \\ 3.002373 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}_4 = \begin{pmatrix} 1.004449 \\ 1.001433 \\ 3.000287 \end{pmatrix}$$

Se non si esplicita la componente x_2 del vettore soluzione (e quindi non ci si accorge che la matrice è riducibile) si deve applicare il metodo di Gauss-Seidel al sistema 4x4:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^{(1)} &= \frac{1}{4}(x_k^{(2)} + 1.5x_k^{(3)} + 0.5) \\ x_{k+1}^{(2)} &= \frac{1}{2}(4) \\ x_{k+1}^{(3)} &= \frac{1}{3}(1.5x_{k+1}^{(1)} - 1x_k^{(4)} + 4.5) \\ x_{k+1}^{(4)} &= \frac{1}{5}(-2x_{k+1}^{(2)} + 1x_{k+1}^{(3)} + 18) \end{aligned}$$

Si ricava:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 2.0 \\ 1.5625 \\ 3.1125 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1.210938 \\ 2.0 \\ 1.067969 \\ 3.013594 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1.025488 \\ 2.0 \\ 1.008213 \\ 3.001643 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 1.003080 \\ 2.0 \\ 1.000992 \\ 3.000198 \end{pmatrix}$$

c) Nel caso in cui si considera il sistema ridotto, per stimare il fattore di convergenza del metodo possiamo calcolare l'autovalore dominante della matrice di iterazione del metodo di Jacobi e, considerato che la matrice del sistema da risolvere gode di proprietà A ed è coerentemente ordinata, si può applicare la relazione $|\mu_J|^2 = |\lambda_S|$ dove μ_J è l'autovalore di massimo modulo della matrice di iterazione di Jacobi e λ_S è l'autovalore di massimo modulo della matrice di iterazione di Gauss-Seidel.

La matrice di iterazione di Jacobi è $E_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 3/8 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}$

Gli autovalori di E_J sono dati da $\det(E_J - \mu I) = 0$ cioè $-\mu(\mu^2 - \frac{29}{240}) = 0$.

Gli autovalori sono $\mu = 0$ e $\mu = \pm\sqrt{0.120833333} = \pm 0.3476108936$

L'autovalore di massimo modulo è $\mu_J = 0.3476108936$, da cui si ricava $\lambda_S = \mu_J^2 = 0.120833333$.

Se si lavora sulla matrice A di dimensione 4x4 poichè non vale la precedente relazione tra le matrici di Jacobi e Gauss-Seidel, conviene stimare il fattore di convergenza (cioè l'autovalore dominante della matrice di iterazione) utilizzando i rapporti delle norme tra gli scarti, $\dfrac{\|\mathbf{d}_{k+1}\|}{\|\mathbf{d}_k\|}$, con $\mathbf{d}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}$.

Utilizzando la norma euclidea ($\|\mathbf{d}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |d_i^2|}$) si hanno i seguenti rapporti:

iterazione	stima di λ_S
2	0.297989
3	0.163033
4	0.120833

Utilizzando la norma infinito (o norma massima, $\|\mathbf{d}\| = \max_{1 \le i \le n} |d_i|$) si hanno i seguenti rapporti:

iterazione	stima di λ_S
2	0.348896
3	0.170773
4	0.120833

Con la norma assoluto (o norma 1, $\|\mathbf{d}\| = \sum_{i=1}^{n} |d_i|$) si ha invece:

iterazione	stima di λ_S
2	0.246967
3	0.153126
4	0.120833