Calcolo Numerico
Ingegneria Meccanica (sede di Vicenza)
I compitino - 18 maggio 2006

1. Si vuole risolvere l'equazione $f(x) = 0$ con $f(x) = (x-1)^2 + 3\ln(x)$, nell'intervallo $[0.5, 2]$ con gli schemi di Newton-Raphson e della Regula Falsi; calcolare:

   a) le approssimazioni x_1, x_2 e x_3 con lo schema di Newton-Raphson, partendo da $x_0 = 0.5$;

   b) le approssimazioni x_2 e x_3 con lo schema della Regula-Falsi partendo da $x_0 = 0.5$ e x_1 calcolato al punto a).

   Stimare, inoltre il fattore di convergenza del metodo di Newton-Raphson assumendo $\xi \approx x_3$.

2. Sia data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 29 \end{pmatrix}$$
   Provare che verifica le condizioni del teorema LDU e trovare i fattori L e L^T tali che $A = LL^T$.

3. a) Data la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 10 \\ 5 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$
   trovare la norma massima sulle righe $\|B\|_\infty$ e la norma massima sulle colonne $\|B\|_1$: spiegare il risultato che si ottiene.

   b) Data la funzione $f(x) = (x-1)^2 e^x$ che ammette la radice doppia $\xi = 1$, dire se si può applicare il metodo delle bisezioni nell'intervallo $[0, 2]$ e spiegare adeguatamente la risposta.

Tempo a disposizione: 1 ora e 45 minuti

Soluzione del I compitino - 18 maggio 2006

1. La funzione $f(x) = (x-1)^2 + 3\ln(x)$ ammette la radice $\xi = 1$.

   Utilizziamo la notazione M1 e M2 per indicare la stima della costante asintotica dell'errore per il metodo di Newton-Raphson mediante le formule

$$M1 = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k - x_{k-1}|^2}$$

$$M2 = \frac{|f''(x_k)|}{2|f'(x_k)|}$$

   dove, nel caso specifico, vale $f'(x) = 2(x-1) + \frac{3}{x}$ e $f''(x) = 2 - \frac{3}{x^2}$.

   Per la Regula Falsi, invece, abbiamo

$$M = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k - x_{k-1}|^{1.618}}$$

   . Usiamo inoltre la notazione C_k per indicare il rapporto incrementale $C_k = \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$.

   Partendo da $x_0 = 0.5$, i metodi di Newton-Raphson e della Regula Falsi danno i risultati messi in tabella (procediamo con le iterazioni per raggiungere una precisione dell'ordine di 1.e-08):

   I valori che interessano per la corretta risposta alle domande dell'esercizio sono messi in evidenza.

Tabella 1: Metodo di Newton-Raphson

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$	M1	M2
0	$\boxed{0.50000000E+00}$	$\boxed{-0.18294415E+01}$	$\boxed{0.50000000E+01}$	-	-	-
1	$\boxed{0.86588831E+00}$	$\boxed{-0.41401211E+00}$	$\boxed{0.31964267E+01}$	0.36588831E+00	-	0.31304749E+00
2	$\boxed{0.99541173E+00}$	$\boxed{-0.13775443E-01}$	$\boxed{0.30046517E+01}$	0.12952342E+00	0.96750058E+00	0.17102153E+00
3	$\boxed{0.99999643E+00}$	-0.10703724E-04	0.30000036E+01	0.45847053E-02	0.27328439E+00	$\boxed{0.16667004E+00}$
4	0.10000000E+01	-0.63649086E-11	0.30000000E+01	0.35679038E-05	0.16974238E+00	0.16666667E+00
5	0.10000000E+01	0.00000000E+00		0.21216362E-11	0.16666509E+00	0.16666667E+00

Tabella 2: Metodo della Regula-Falsi

k	x_k	$f(x_k)$	C_k	$\|x_k - x_{k-1}\|$	M
0	$\boxed{0.50000000E+00}$	$\boxed{-0.18294415E+01}$	-	-	-
1	$\boxed{0.86588831E+00}$	$\boxed{-0.41401211E+00}$	$\boxed{0.38684741E+01}$	0.36588831E+00	-
2	$\boxed{0.97291038E+00}$	$\boxed{-0.81656072E-01}$	$\boxed{0.31054906E+01}$	0.10702207E+00	0.54447177E+00
3	$\boxed{0.99920448E+00}$	-0.23868806E-02	0.30147143E+01	0.26294097E-01	0.97762073E+00
4	0.99999622E+00	-0.11333030E-04	0.30004003E+01	0.79174355E-03	0.28526856E+00
5	0.10000000E+01	-0.15048126E-08	0.30000019E+01	0.37771727E-05	0.39378318E+00
6	0.10000000E+01	-0.99920072E-15		0.50160387E-09	0.29819825E+00

2. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 29 \end{pmatrix}$$

La matrice A è simmetrica e soddisfa le ipotesi del teorema LDU (infatti $|a_{11}| = 1$, $det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4$ e $det(A) = 116 - 16 - 64 = 36$) per cui è possibile scrivere la matrice A come $A = LL^T$. Si ha, quindi:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Devono quindi valere le relazioni:

$$\begin{aligned} l_{11}^2 &= 1 \rightarrow l_{11} = 1 \\ l_{21}l_{11} &= 0 \rightarrow l_{21} = 0 \\ l_{31}l_{11} &= 2 \rightarrow l_{31} = 2 \\ l_{21}^2 + l_{22}^2 &= 4 \rightarrow l_{22} = \sqrt{4 - 0} = 2 \\ l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} &= 8 \rightarrow l_{32} = 8/2 = 4 \\ l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 &= 29 \rightarrow l_{33} = \sqrt{29 - 2^2 - 4^2} = \sqrt{29 - 4 - 16} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

La matrice L è dunque

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

3. a) Per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 10 \\ 5 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max(6, 12, 18) = 18 \\ \|A\|_1 &= \max(6, 12, 18) = 18 \end{aligned}$$

Le due norme coincidono perchè la matrice è simmetrica.

b) La funzione $f(x) = (x-1)^2 e^x$ è sempre positiva (e vale 0 solo nella radice $\xi = 1$). Perciò il metodo delle bisezioni non si può applicare in nessun intervallo contenente la radice!