**Calcolo Numerico**
Ingegneria Meccanica (sede di Vicenza)
**Esame - 17 luglio 2006**

1. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.2 \\ 1 & 6.5 & 1.75 \\ 0 & 2 & 2.25 \end{pmatrix}$$
   a) verificare che $A$ soddisfa le condizioni del teorema $LDU$;
   b) fattorizzare secondo Crout $A = LU$ (prendendo $u_{ii} = 1$);
   c) usare la fattorizzazione per calcolare $\det(A^{-2})$;
   d) usare la fattorizzazione per risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b}^T = (2.8 \;\; 19.25 \;\; 10.75)^T$.

2. Sia data la tabella seguente:

| $x_i$ | -1 | 0 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 9 | 0 | 0 | 15 | 84 |

   a) Scrivere la tabella delle differenze divise.
   b) Trovare il polinomio interpolatore (con la formula di Newton) di grado non superiore a 4.
   c) Trovare la retta ai minimi quadrati che minimizza la somma dei quadrati degli scarti verticali.

3. Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 15 \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$
   a) dire per quali valori di $\alpha$ il metodo di Jacobi converge.
   b) trovare il valore di $\alpha$ in corrispondenza del quale il metodo SOR ha un valore di omega ottimo $\omega_{opt} = 3/2$. Per tale valore trovare la velocità asintotica di convergenza del metodo SOR.

4. Integrazione numerica: descrivere la formula dei trapezi, sia su un singolo intervallo sia composta, e ricavare l'espressione numerica dell'errore.

---

*Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti*

1. È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.2 \\ 1 & 6.5 & 1.75 \\ 0 & 2 & 2.25 \end{pmatrix}$$

a) La matrice verifica le condizioni del teorema $LDU$ in quanto i minori principali costruiti a partire dall'angolo superiore sinistro hanno tutti determinante diverso da zero:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0.2 \neq 0 \\ \det \begin{pmatrix} 0.2 & 1 \\ 1 & 6.5 \end{pmatrix} &= 0.3 \neq 0 \\ \det A &= 0.375 \neq 0 \end{aligned}$$

b) La fattorizzazione di $A$ come $A = LU$ si costruisce imponendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.2 \\ 1 & 6.5 & 1.75 \\ 0 & 2 & 2.25 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} l_{11} &= a_{11} \\ l_{11}u_{12} &= a_{12} \\ l_{11}u_{13} &= a_{13} \\ l_{21} &= a_{21} \\ l_{21}u_{12} + l_{22} &= a_{22} \\ l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} &= a_{23} \\ l_{31} &= a_{31} \\ l_{31}u_{12} + l_{32} &= a_{32} \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} &= a_{33} \end{aligned}$$

Andando a sostituire i valori della matrice $A$ e sostituendo i valori della matrice $L$ e della $U$ mano mano che vengono ricavati si ottiene:

$$\begin{aligned} l_{11} &= 0.2 \\ 0.2u_{12} &= 1 \Longrightarrow u_{12} = 5 \\ 0.2u_{13} &= 0.2 \Longrightarrow u_{13} = 1 \\ l_{21} &= 1 \\ 1 \cdot 5 + l_{22} &= 6.5 \Longrightarrow l_{22} = 1.5 \\ 1 \cdot 1 + 1.5u_{23} &= 1.75 \Longrightarrow u_{23} = 0.5 \\ l_{31} &= 0 \\ 0 \cdot 5 + l_{32} &= 2 \Longrightarrow l_{32} = 2 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0.5 + l_{33} &= 2.25 \Longrightarrow l_{33} = 1.25 \end{aligned}$$

La matrice $L$ è:

$$L = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 2 & 1.25 \end{pmatrix}$$

La matrice $U$ è:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Si ha $\det A = \det LU = \det L \det U = \det L = 0.375$. Quindi $\det A^{-2} = \det A^{-2} = 0.375^{-2} = 7.11111111$.

d) Da $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si ha $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Si pone $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ e si hanno i due sistemi da risolvere per sostituzione in avanti e all'indietro: $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ e $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 2 & 1.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 19.25 \\ 10.75 \end{pmatrix}$$

Si ricava facilmente, per sostituzione in avanti:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \dfrac{2.8}{0.2} = 14 \\ \\ \dfrac{19.25 - 14}{1.5} = 3.5 \\ \\ \dfrac{10.75 - 2 \cdot 3.5}{1.25} = 3 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

E si ricava per sostituzione all'indietro:

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \\ x_2 &= 3.5 - 3 \cdot 0.5 = 2 \\ x_1 &= 14 - 3 - 5 \cdot 2 = 1 \end{aligned}$$

Quindi $\mathbf{x} = (1\,2\,3)^T$.

2. a) La tabella delle differenza divise è:

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $f(\cdot,\cdot)$ | $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ | $f(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ | $f(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | $\boxed{9}$ | | | | |
| 0 | 0 | $\frac{0-9}{0-(-1)} = \boxed{-9}$ | | | |
| 2 | 0 | $\frac{0-0}{2-0} = 0$ | $\frac{0+9}{2-(-1)} = \boxed{3}$ | | |
| 3 | 15 | $\frac{15-0}{3-2} = 15$ | $\frac{15-0}{3-0} = 5$ | $\frac{5-3}{3-(-1)} = \boxed{0.5}$ | |
| 4 | 84 | $\frac{84-15}{4-3} = 69$ | $\frac{69-15}{4-2} = 27$ | $\frac{27-5}{4-0} = \frac{11}{2}$ | $\frac{11/2-1/2}{4-(-1)} = \boxed{1}$ |

b) Il polinomio di Newton di grado 4 che interpola i dati assegnati è dunque (prendendo i valori della diagonale principale della tabella)

$$p(x) = 9 - 9(x+1) + 3(x+1)x + 0.5(x+1)x(x-2) + (x+1)x(x-2)(x-3) =$$
$$= x^4 - 3.5x^3 + 3.5x^2 - x$$

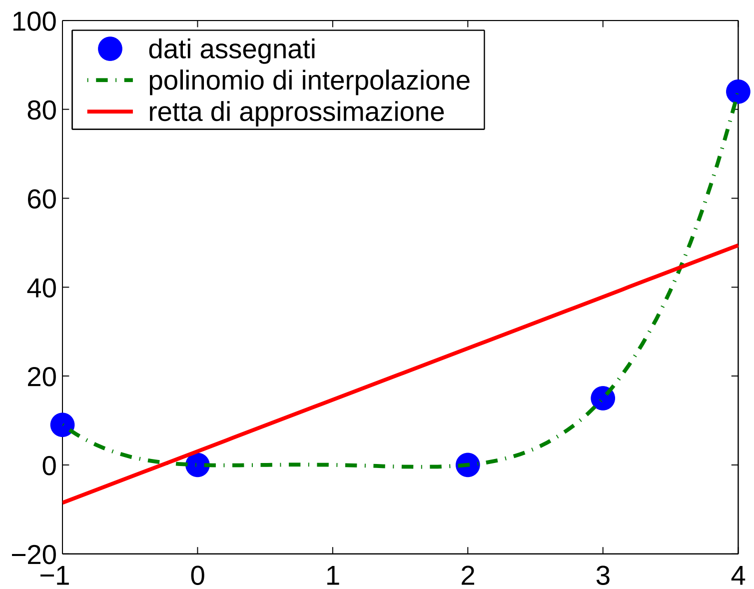
c) Il sistema da risolvere per ottenere la retta di approssimazione ai minimi quadrati è:

$$\begin{cases} na_0 + \sum_{i=1}^n x_i a_1 = \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i a_0 + \sum_{i=1}^n x_i^2 a_1 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

dove $n = 5$. Poichè $\sum_{i=1}^n x_i = 8$, $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 30$, $\sum_{i=1}^5 y_i = 108$ e $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 372$, si ha il sistema

$$\begin{cases} 5a_0 + 8a_1 = 108 \\ 8a_0 + 30a_1 = 372 \end{cases}$$

La soluzione è $a_0 = 3.069767442$, $a_1 = 11.581395349$. La retta ai minimi quadrati che minimizza gli scarti verticali è: $y = 3.069767442 + 11.581395349x$.




3. a) L'autovalore di massimo modulo della matrice di iterazione del metodo di Jacobi deve essere minore di 1 affinchè il metodo converga.

Scriviamo la matrice di iterazione del metodo di Jacobi scomponendo la matrice $A$ come somma della matrice triangolare bassa $L$, la diagonale $D$ e la triangolare alta $U$, $A = L + D + U$:

$$E_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 15 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ -2/\alpha & -1/\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori si calcolano imponendo $\det(E_J - \lambda I) = 0$, vale a dire

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & -5 \\ -2/\alpha & -1/\alpha & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ vale a dire } -\lambda^3 + \frac{9\lambda}{\alpha} = 0$$

Ricaviamo gli autovalori $\lambda = 0$ e $\lambda = \pm\frac{3}{\sqrt{\alpha}}$.

Perchè ci sia convergenza deve dunque essere $\frac{3}{\sqrt{\alpha}} < 1$ ovvero $3 < \sqrt{\alpha}$.
Ricaviamo la relazione $\alpha > 9$.
Dalla relazione dell'$\omega_{opt}$, $\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\lambda_J^2}}$, valida perchè la matrice è biciclica e coerentemente ordinata, si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1+\sqrt{1-9/\alpha}} &= \frac{3}{2} \\
\frac{4}{3} &= 1 + \sqrt{1-9/\alpha} \\
\frac{1}{3} &= \sqrt{1-9/\alpha} \\
\frac{1}{9} &= 1 - 9/\alpha \\
\frac{-8}{9} &= -9/\alpha \\
8\alpha &= 81 \\
\alpha &= \frac{81}{8} = 10.125
\end{aligned}$$

Da $\omega_{opt} = \frac{3}{2} = 1.5$ segue la relazione per l'autovalore di massimo modulo della matrice di iterazione del metodo SOR con $\omega = \omega_{opt}$, $\lambda = \omega_{opt} - 1 = 0.5$, da cui la velocità di convergenza $R = -\log_{10}\lambda = 0.3010299957$.