Corso di Calcolo Numerico
per Ingegneria Meccanica (sede di Vicenza)
Esercitazione 2.
Sulla Soluzione di Sistemi Lineari

Si vuole risolvere il sistema lineare: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove la matrice A e il vettore $\mathbf{b}$ sono dati da:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Costruire un codice nel linguaggio di programmazione Fortran (o in Matlab o in un altro linguaggio di programmazione a scelta dello studente ma adeguato per il problema) che risolva il sistema assegnato con lo schema di Gauss-Seidel

$$(D + L)\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b} - U\mathbf{x}_k$$

Si calcoli l'approssimazione della soluzione con una tolleranza $\varepsilon = 10^{-8}$, definendo come scarto tra due approssimazioni successive il vettore

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}.$$

Il criterio di arresto sarà, dunque, $\|\mathbf{d}_k\| < \varepsilon$, essendo $\|\cdot\|$ la norma euclidea. Si utilizzi doppia precisione in tutti i calcoli reali.

Stimare la costante asintotica di convergenza $\lambda_{1,s}$ e la velocità asintotica di convergenza $R = -\log_{10} \lambda_{1,s}$, utilizzando gli scarti.

A tal fine, si tenga presente che vale il limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{d}_{k+1}\|}{\|\mathbf{d}_k\|} = \lambda_{1,s}$$

Inoltre, si riporti in un grafico semilogaritmico la norma euclidea $\|\mathbf{d}_k\|$ in funzione di k e si calcoli $\lambda_{1,s}$ utilizzando il valore della pendenza del segmento rettilineo del grafico.

Si scriva una breve relazione in un documento di testo, riportando il problema risolto, descrivendo il metodo utilizzato, i risultati ottenuti (compresi i grafici) e il testo del programma. Si spieghi in maniera opportuna la relazione che esiste tra il valore della pendenza del segmento rettilineo del grafico descritto sopra e la costante asintotica di convergenza della matrice di iterazione di Gauss-Seidel.

Opzionale

Osservando che la matrice A gode di proprietà A ed è coerentemente ordinata, si calcoli la costante asintotica del metodo di Gauss-Seidel calcolando la costante asintotica del metodo di Jacobi, $\lambda_{1,J}$ e applicando la relazione che lega $\lambda_{1,S}$ a $\lambda_{1,J}$. Per calcolare $\lambda_{1,J}$ si costruisca un codice che risolva lo stesso sistema lineare con il metodo di Jacobi e, in maniera opportuna, si faccia uso degli scarti del metodo di Jacobi.

Si confrontino, infine, i risultati ottenuti dal metodo di Jacobi e dal metodo di Seidel nella risoluzione del sistema lineare (numero di iterazioni per arrivare a convergenza, costante asintotica di convergenza e velocità asintotica di convergenza). Si riporti in un grafico semilogaritmico la norma degli scarti in funzione delle iterate per i due metodi.

Si scrivano i risultati ottenuti nella relazione.