Università degli Studi di Padova

Laboratorio di Calcolo Numerico
Laboratorio 4: Functions. Soluzione di Equazioni non lineari

Claudia Zoccarato

E-mail: claudia.zoccarato@unipd.it

Dispense: Moodle Dipartimento ICEA

29 Marzo 2017

Function in MATLAB

Lo scopo di una funzione è quello di prendere in input un certo numero di valori, fare alcune operazioni con tali argomenti e quindi restituire l'output.

- Lista di comandi/istruzioni con lista di variabili in input e output (opzionali)
- Le variabili usate all'interno della function sono locali e vengono eliminate dalla memoria dopo l'esecuzione della stessa
- La prima riga della function deve avere la seguente sintassi:
  `>> function[parametri di output]=nomefunzione(parametri di input)`
- I parametri di input e output vanno separati da virgole
- Il nome del file .m con cui viene salvata la function DEVE essere uguale al nome della function

FUNCTION - Esempio

```
function [A,p,d]=rettangolo(a,b)
% Calcolo area, perimetro e diagonale di un rettangolo
% dati i lati a e b
% Input: lati rettangolo (a, b)
% Output: area (A) , perimetro (p) e diagonale (D) di un rettangolo
%
A = a*b;
p= 2*(a+b);
d = sqrt(a^2+b^2);
```

- Eseguire la function da linea di comando:
  `>> [A,p,d]=rettangolo(3,4)` + INVIO
- Le function possono essere utilizzate all'interno di uno script (nb: la function va salvata nella stessa cartella dello script)

Equazioni non lineari in una variabile

Data una funzione $f(x)$ si vogliono cercare le soluzioni del problema $f(x) = 0$ con x che varia in un certo intervallo $[a, b]$.

1. metodo di bisezione (lezione 03)
2. metodo di punto fisso (lezione 04)
3. metodo di Newton-Raphson (lezione 04)
4. metodo della secante variabile (lezione 05)

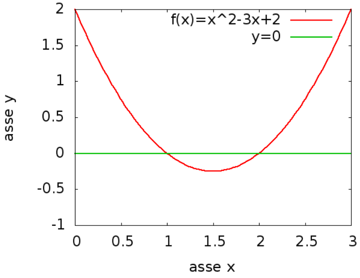
Equazioni non lineari in una variabile

Problema

Vogliamo implementare un programma in MATLAB per risolvere la seguente equazione non lineare: trovare $\xi \in \mathbb{R}$ tale che ξ è uno zero della funzione $f(x)$:

$$f(\xi) = 0$$

Esempio



$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Soluzioni: $\xi_1 = 1$ e $\xi_2 = 2$.
Fissiamo $x > 1.5$ in modo che il problema ammetta una sola soluzione, $\xi = 2$.

ESERCIZIO - Il metodo di punto fisso in MATLAB

L'equazione non lineare si può riformulare con un problema di punto fisso equivalente, cioè avente la stessa soluzione: trovare $\xi \in \mathbb{R}$ tale che ξ è un punto fisso della funzione $g(x)$: $g(\xi) = \xi$.
Sotto opportune condizioni, l'algoritmo di Picard costruisce una successione $x_0, x_1, x_2, \dots$ che converge alla soluzione ξ: dato x_0, $x_{k+1} = g(x_k)$.

Condizioni di convergenza

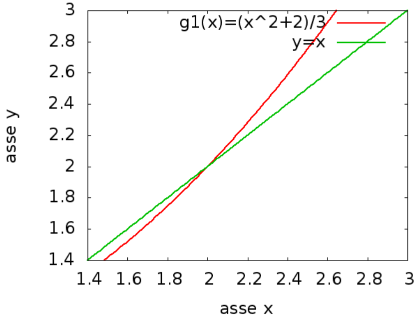
- $|g'(\xi)| < 1$
- x_0 sufficientemente vicina a ξ

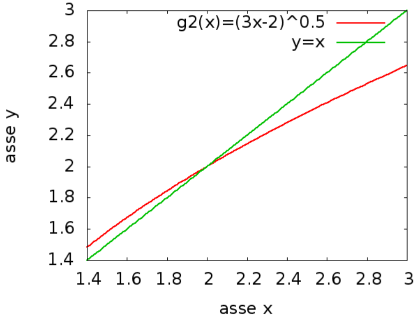
ESERCIZIO - Il metodo di punto fisso in MATLAB

Per ottenere un problema di punto fisso equivalente all'equazione non lineare, isoliamo la variabile x nell'equazione $f(x) = 0$:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

diventa $x = (x^2 + 2)/3$ oppure $x = \sqrt{3x - 2}$.
Possiamo scegliere $g_1(x) = \frac{x^2+2}{3}$ oppure $g_2(x) = \sqrt{3x - 2}$.





ESERCIZIO - Il metodo di punto fisso in MATLAB

- Implementare il metodo di punto fisso in MATLAB (utilizzando uno script) per risolvere l'equazione $f(x) = 0$ con $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$. Applicare il metodo alle funzioni di punto fisso $g_1(x) = \frac{x^2+2}{3}$, $g_2(x) = \sqrt{3x-2}$ e $g_3(x) = \frac{x^2-2}{2x-3}$.
- Disegnare il grafico delle funzioni di punto fisso $g_1(x)$, $g_2(x)$ e $g_3(x)$ nell'intervallo $[1.4, 3.0]$ e vericare che il problema ammette un'unica soluzione.
- Utilizzare il criterio di arresto per cui l'approssimazione x_k della radice ξ sia calcolata a meno di una tolleranza `toll=10`$^{-10}$. Inoltre, si fissi un numero massimo di iterazioni `itmax=100` da eseguire.
- Stimare la costante asintotica di convergenza con i due metodi conosciuti ($M1 = d_{k+1}/d_k$ e $M2 = |g'(x_k)|$)
- Utilizzare i vettori per salvare i valori delle approssimazioni x_k, gli scarti d_k e le costanti asintotiche di convergenza $M1$ e $M2$.
- Disegnare il grafico del profilo di convergenza del metodo: plottare in un grafico semilogaritmico (comando `semilogy`) lo scarto in funzione del numero di iterazioni.
- Stampare i risultati ottenuti in una tabella del tipo:

  \# Iterazioni k | x_k | $g(x_k)$ | d_k

- Commentare i risultati ottenuti al variare della funzione di punto fisso utilizzata.

SOLUZIONE ...

```
close all
clear all
% Schema di Picard per la soluzione di un'equazione non lineare
% Grafico della funzione nell'intervallo dato
figure(1)
...
% Dati di input
toll = 10^-10;
itmax = 100;
x0 = 1.6;
% Inizializzazioni delle variabili
xold = x0 ;                             % Impongo valore iniziale di x
dk(1) = 2.0*toll;                       % Impongo valore iniziale dello scarto
iter = 1;                               % Inizializzo contatore delle iterazioni
...                                     % Definisco la funzione g(x)
...                                     % Definisco la funzione g'(x)
% Ciclo while
while (condizione)
        iter = iter + 1;                % Aggiorno il valore del contatore
        xknew = ...                     % Calcolo la nuova approssimazione xk
        dk(iter) = ...                  % Calcolo il valore dello scarto dk
        M1 = ...                        % Calcolo la costante asint. M1
        M2 = ...                        % Calcolo la costante asint. M2
        xold = xnew;                    % Aggiorno il valore di xold
        ...                             % Stampa dei risultati
end
% Plot dei risultati
figure(2)
...
```

ESERCIZI

1. Nell'esercizio precedente, tradurre in function la parte di codice che risolve il problema di punto fisso.
2. Implementare uno script in MATLAB per risolvere l'equazione $f(x) = 0$ con $f(x) = ln(x+2) - 2x$ nell'intervallo $]-2, 2]$ applicando il metodo di Newton-Raphson e utilizzando come punto iniziale $x_0 = -0.5$. Disegnare il grafico del profilo di convergenza, verificare l'ordine di convergenza del metodo e stimare la costante asintotica di convergenza. Successivamente tradurre la parte di codice relativa alla soluzione con metodo di Newton-Raphson in una function da utilizzarsi anche negli esercizi seguenti.
3. Implementare uno script in MATLAB per approssimare la radice $\xi = 1$ del polinomio $p(x) = x(x-1)^3$ nell'intervallo $[-2, 2]$ applicando il metodo di Newton-Raphson partendo da $x_0 = 2.0$. Disegnare il grafico del profilo di convergenza e discutere il risultato ottenuto. Modificare opportunamente il metodo per ripristinare l'ordine di convergenza e risolvere nuovamente il problema.

ESERCIZI

4. Considerata l'equazione non lineare $f(x) = 0$ con $f(x) = arctan(7(x - \pi/2)) + sin((x - \pi/2)^3)$ nell'intervallo $]-1, 6]$. Disegnare il grafico della funzione nell'intervallo dato. Implementare uno script in MATLAB per approssimare la radice ξ assumendo come punto iniziale $x_{0,1} = 0.5$. Successivamente ripetere il calcolo partendo da $x_{0,2} = 4.0$.
5. Implementare uno script in MATLAB per approssimare le radici ξ_1 e ξ_2 del polinomio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ con il metodo di Newton-Raphson. Partire dal punto $x_0 = 2.5$ e discutere il risultato ottenuto. Cambiare il punto di partenza con $x_0 = 0.5$ e verificare l'ordine di convergenza del metodo.
6. Si consideri la funzione $f(x) = x^3 + 4xcos(x) - 2$ nell'intervallo $[0, 2]$. Approssimare la soluzione di $f(x) = 0$ con i metodi di bisezione, di Newton-Raphson e di punto con fisso utilizzando la funzione $g(x) = (2 - x^3)/(4cos(x))$. Riportare in uno stesso grafico il profilo di convergenza relativo ai metodi utilizzati. Si richiede che all'interno dello script vengano chiamate le function che implentano i vari metodi.