Università degli Studi di Padova

Laboratorio di Calcolo Numerico
Laboratorio 10: Norme di vettori e matrici, autovalori

Claudia Zoccarato

E-mail: claudia.zoccarato@unipd.it

Dispense: Moodle Dipartimento ICEA

10 Maggio 2017

Stampa di Vettori e Matrici

```
>> vettore = [1 2 3 4 5];
>> fprintf(1,‘Vettore= %g %g %g %g %g ’, vettore);
>> matrice = [1 2 3; 4 5 6];
>> fprintf(1,‘%g %g %g ’, matrice);
```

L'operatore :

L'operatore : permette di estrarre sotto-matrici da una matrice nota.

Esempio 1

```
>> A = [1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12];
>> C = A(:,1);
>> R = A(1,:);
>> C23 = A(:,2:3);
>> C14 = A(:,[1 4]);
```

Esempio 2

```
>> vert = [0 1 1 0; 0 0 1 1];
>> x = [vert(1,:)  vert(1,1)];
>> y = [vert(2,:)  vert(2,1)];
>> plot(x,y,'r');
```

Norme di vettori e matrici

Dato un vettore $\mathbf{x}$, la norma $\|\mathbf{x}\|$ ne rappresenta una "misura" per confrontare vettori diversi tra loro. Le norme più utilizzate sui vettori sono le seguenti:

- Norma Assoluta: $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- Norma Euclidea: $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$
- Norma Massima: $\|\mathbf{x}\|_\infty = max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Norme di vettori e matrici

sum	sum(x) restituisce la somma di tutte le componenti di x sum(A) restituisce un vettore riga con la somma degli elementi di ciascuna colonna di A
max	max(x) restituisce la massima componente di x max(A) restituisce un vettore riga con la massima componente delle colonne di A
min	vedi max

Le norme possono essere calcolate in MATLAB come:

```
>> norma1 = sum(abs(x));
>> norma2 = sqrt(sum(x.^2));
>> normainf = max(abs(x));
```

In pratica, le norme si possono calcolare con le seguenti function di MATLAB:

```
>> norma1 = norm(x,1);
>> norma2 = norm(x);
>> normainf = norm(x,inf);
```

Norme di vettori e matrici

Le function precedenti possono essere utilizzate anche per il calcolo delle norme di matrici:

- Norma 1: $\|A\|_1 = max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$
- Norma 2: $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1 \left(A^T A\right)}$
- Norma Inf: $\|A\|_\infty = max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$

```
>> norma1 = norm(A,1);
>> norma2 = norm(A);
>> normainf = norm(A,inf);
```

Inoltre l'istruzione `norm(A,'fro')` restituisce la norma di Frobenius della matrice A.

Funzioni utili di MATLAB

Funzioni MATLAB che consentono di costruire particolari matrici e vettori. Si consulti l'help per una descrizione dettagliata.

`linspace`	vettore riga di elementi equispaziati
`zeros`	matrice contenente solo elementi uguali a zero
`ones`	matrice contenente solo elementi uguali a uno
`eye`	matrice identità
`diag`	matrice diagonale
`magic`	matrice a valori interi con somme uguali su righe e colonne
`tril` e `triu`	estraggono la parte triangolare inferiore e superiore
`inv`	restituisce matrice inversa (applicazione a matrici quadrate)
`det`	restituisce il determinante di matrici quadrate
`eig`	per calcolare autovalori e autovettori di matrici quadrate

Autovalori e Autovettori

Esempio

Trovare autovalori e autovettori della matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

`>> lambda = eig(A);`	restituisce in `lambda` gli autovalori di A
`>> [V,L] = eig(A);`	restituisce in `V` la matrice le cui colonne sono gli AUTOVETTORI di A e in `L` una matrice diagonale i cui elementi diagonali sono i corrispondenti AUTOVALORI di A.

Autovalori e Autovettori

Esempio

Trovare autovalori e autovettori della matrice A:

$$V = \begin{pmatrix} 1.0000 & -0.9363 & -0.1741 \\ 0 & 0.3511 & -0.6963 \\ 0 & 0 & 0.6963 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli autovettori di A sono normalizzati.

Teorema di Gershgorin

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se indichiamo con U_r e U_c l'unione dei cerchi costruiti nel piano complesso aventi come centro gli elementi diagonali e come raggio la somma dei moduli degli elementi extra-diagonali posti su ciascuna riga e colonna, rispettivamente, allora tutti gli autovalori di A saranno contenuti nella regione piano $U = U_r \cap U_c$.

ESERCIZIO

Implementare in MATLAB una function per disegnare i cerchi di Gershgorin della matrice A nel piano complesso. Plottare nello stesso grafico gli autovalori di A.

Teorema di Gershgorin

```
% Gershgorin's circles of the matrix A.
d = diag(A);
cx = real(d);
cy = imag(d);
B = A - diag(d);
[~, n] = size(A);
rig = sum(abs(B'));
col = sum(abs(B));
for i=1:n
    if rig(i) < col(i)
       raggio(i) = rig(i);
    else
       raggio(i) = col(i);
    end
end
lambda = eig(A);
lx = real(lambda);
ly = imag(lambda);
t = linspace(0,2*pi,100);
hold on; grid on; axis equal;
xlabel('Re')
ylabel('Im')
for i=1:n
    x = cx(i) + raggio(i)*cos(t);
    y = cy(i) + raggio(i)*sin(t);
    plot(x,y);
end
plot(lx,ly,'o');
hold off
title('Gershgorin circles and the eigenvalues of a matrix')
```

ESERCIZI

1. Data la matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Rappresentare i cerchi di Gershgorin e gli autovalori di A. A partire dalla matrice A, costruire la matrice B che abbia autovalori reali e positivi.

2. Data la matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   verificare che sia simile alla matrice B:

$$B = \begin{pmatrix} 19.20 & 21.00 & 21.75 \\ -4.75 & -4.00 & -5.25 \\ -6.75 & -8.00 & -7.25 \end{pmatrix}$$

ESERCIZI

2. Data la matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

   calcolarne una matrice simile B e verificare che abbiano gli stessi autovalori.

3. Determinare una matrice quadrata reale A di ordine 3 che possieda gli autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$ corrispondenti ai seguenti autovettori:
   $\mathbf{u_1} = [2, 3, -2]^T$ $\mathbf{u_2} = [9, 5, 4]^T$ $\mathbf{u_3} = [4, 4, -1]^T$