METODI ITERATIVI

Dato un sist. lineare $Ax=b$ sono metodi che trovano la sua soluzione partendo da una approssimazione iniziale e migliorando ITERATIVAMENTE questa approssimazione.

$x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots \to x_k \leftarrow$ indice di iterazione

Il metodo si dice convergente se $x_k \to h : h = A^{-1}b$.

Le varie approssimazioni si ottengono attraverso operazioni algebriche $x_{k+1} = F(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, A, b)$

METODI ITERATIVI STAZIONARI

Si possono scrivere nelle due forme equivalenti:

1) $x_{k+1} = E x_k + q$ con E detta MATRICE DI ITERAZIONE

2) $x_{k+1} = x_k + C r_k$ con $r_k = b - A x_k$ residuo al passo k

Affinché i due siano equivalenti occorre che C, q ed E soddisfino certe relazioni.
Se sostituisco a r_k la sua espressione in 2, ottengo:

$$x_{k+1} = x_k + C(b - A x_k) = I x_k + C \cdot b - C A x_k =$$
$$= (I - CA) x_k + Cb \Rightarrow \begin{array}{l} E = I - CA \\ q = Cb \end{array}$$

Inoltre entrambe le espressioni devono essere verificate per $x_k = h$, quando x_k è uguale alla soluzione del sistema:

$$h = Eh + q \Rightarrow \text{Se sostituisco le espressioni trovate per } E \text{ e } q$$

$$h = (I - CA)h + Cb \Rightarrow \cancel{h} = \cancel{h} - CAh + Cb \Rightarrow CAh = Cb \quad \text{OK}$$

METODO DI JACOBI

Sia dato il sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(Soluzione $[1, 1, 1]$)

Prendiamo come soluzione iniziale $x_0 = \begin{bmatrix} x_0^{(1)} \\ x_0^{(2)} \\ x_0^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

e andiamo a calcolare la nuova approssimazione ESPLICITANDO l'incognita i-esima nell'equazione i-esima:

$$\begin{cases} 5x^{(1)} = 3 - x^{(2)} + 3x^{(3)} \\ 4x^{(2)} = 4 + x^{(1)} - x^{(2)} \\ 5x^{(3)} = 9 - 2x^{(1)} - 2x^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{(1)} = \frac{1}{5}\left(3 - x^{(2)} + 3x^{(3)}\right) \\ x^{(2)} = \frac{1}{4}\left(4 + x^{(1)} - x^{(2)}\right) \\ x^{(3)} = \frac{1}{5}\left(9 - 2x^{(1)} - 2x^{(2)}\right) \end{cases}$$

Uso l'approssimazione precedente x_k nell'espressione di destra in modo da ricavare una nuova approssimazione x_{k+1} a sinistra dell'uguaglianza.

Parto da x_0 e ricavo x_1

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_1^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \\ \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

Poi uso x_1 per trovare x_2

$$\begin{bmatrix} x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{matrix} \frac{1}{5}\left(3 - 1 + 3\cdot\frac{9}{5}\right) = 1.48 \\ \frac{1}{4}\left(4 + \frac{3}{5} - 1\right) = 0.9 \\ \frac{1}{5}\left(9 - 2\cdot\frac{3}{5} - 2\cdot\frac{9}{5}\right) = 0.89 \end{matrix}$$

In generale con il metodo di Jacobi calcolerò la componente i-esima dell'approssimazione (k+1)-esima nel modo seguente:

$$x_{k+1}^{(i)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_k^{(j)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_k^{(j)} \right) \quad \forall i = 1, n$$

N.B.: Non occorre seguire un ordine particolare nelle componenti i, le posso calcolare nell'ordine che voglio

$$x_{k+1}^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12} x_k^{(2)} - a_{13} x_k^{(3)} - \dots - a_{1n} x_k^{(n)} \right)$$

$$x_{k+1}^{(2)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21} x_k^{(1)} - a_{23} x_k^{(3)} \dots - a_{2n} x_k^{(n)} \right)$$

$\vdots$

$$x_{k+1}^{(i)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i \underbrace{- a_{i1} x_k^{(1)} - \dots - a_{i,i-1} x_k^{(i-1)}}_{\text{indice di colonna minore di } i} \underbrace{- a_{i,i+1} x_k^{(i+1)} - a_{in} x_k^{(n)}}_{\text{indice di colonna maggiore di } i} \right)$$

$$A = \begin{bmatrix} \ddots & & N \\ M & F & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$x_{k+1} = F^{-1} \left(b - M x_k - N x_k \right)$$

IMPLEMENTAZIONE DEL METODO DI JACOBI

Per "k" che va da 1 a convergenza

Per "i" che va da 1 a n

! Calcolo la prima sommatoria con accumulo

SOM1 = 0.d0

Per "j" che va da 1 a "i-1"

$SOM1 = SOM1 + a_{ij} x_k^{(j)}$

Fine per

! Calcolo la seconda sommatoria con accumulo

SOM2 = 0.d0

Per "j" che va da "i+1" a n

$SOM2 = SOM2 + a_{ij} x_k^{(j)}$

Fine Per

$$x_{k+1}^{(i)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - SOM1 - SOM2 \right)$$

Fine Per

Fine Per ← Controllo di convergenza

CRITERIO DI ARRESTO

Mi voglio fermare quando $x_k \cong h = A^{-1} b$ cioè quando è piccolo l'errore al passo k:

$$\varepsilon_k = h - x_k \cong 0$$

Purtroppo non conosco h e quindi non posso calcolare ε_k, devo trovare un altro criterio di arresto.

1) Controllo il residuo $r_k = b - Ax_k$ e mi fermo quando una norma (per es. Euclidea) del residuo è piccola

2) Controllo lo scarto $e_k = x_{k+1} - x_k$ e mi fermo quando una norma dello scarto è piccola

Metodo di Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 3 & 7 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Soluzione $[1, 2, 3]$

Esplicitiamo l'incognita diagonale e calcoliamole dalla prima all'ultima

$$x^{(1)}_{k+1} = \frac{1}{8}\left(4 - x^{(2)}_k + 2x^{(3)}_k\right)$$ ← Identico a Jacobi

$$x^{(2)}_{k+1} = \frac{1}{7}\left(8 - 3x^{(1)}_{k+1} + 3x^{(3)}_k\right)$$ ← Qui posso usare $x^{(1)}_{k+1}$ al posto di $x^{(1)}_{(k)}$

$$x^{(3)}_{k+1} = \frac{1}{5}\left(16 + x^{(1)}_{k+1} - x^{(2)}_{k+1}\right)$$ ← Qui posso usare $x^{(1)}_{k+1}$ e $x^{(2)}_{k+1}$ al posto di $x^{(1)}_k$ e $x^{(2)}_k$

In generale per il metodo di Gauss-Seidel vale la formula di aggiornamento:

$$x^{(i)}_{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x^{(j)}_{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x^{(j)}_k\right) \quad \forall i = 1,n$$

NB.: in questo caso l'ordine è importantissimo!!!
Bisogna calcolare le componenti di x_{k+1} dalla prima all'ultima.

Espressione in forma matriciale

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x^{(j)}_{k+1} \Longleftrightarrow M x_{k+1} \qquad \frac{1}{a_{ii}} c_i \Longleftrightarrow F^{-1} c$$

$$\sum^{n} a_{ij}\, x^{(j)}_k \Longleftrightarrow N x_k \longrightarrow x_{k+1} = F^{-1}\left(b - M x_{k+1} - N x_k\right)$$

IMPLEMENTAZIONE DEL METODO DI GAUSS-SEIDEL

Per "k" che va da 1 a convergenza
  Per "i" che va da 1 a n
    ! Calcola la prima sommatoria
    SOM1 = 0.d0
    Per "j" che va da 1 a "i-1"
      $SOM1 = SOM1 + a_{ij} x_{k+1}^{(j)}$
    Fine per
    ! Calcola la seconda sommatoria
    SOM2 = 0.d0
    Per "j" che va da "i+1" a n
      $SOM2 = SOM2 + a_{ij} x_{k}^{(j)}$
    Fine per
    $x_{k+1}^{(i)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - SOM1 - SOM2 \right)$
  Fine per
  ! Controllo di convergenza
  $SCARTO = \| x_{k+1} - x_k \|$
Fine per

CONVERGENZA DEI METODI ITERATIVI

Quando un metodo iterativo converge?

$x_k = h + \varepsilon_k$ ← l'approssimazione al passo k è pari alla soluzione esatta + l'errore al passo k

Scrivo il mio schema generico e sostituisco quest'espressione

$$x_{k+1} = E x_k + q$$
$$\Downarrow$$
$$\cancel{h} + \varepsilon_{k+1} = E(h + \varepsilon_k) + q = \cancel{Eh + q} + E\varepsilon_k$$

Poiché la soluzione del sistema soddisfa esattamente all'espressione ottengo per gli errori la seguente espressione:

$$\varepsilon_{k+1} = E\varepsilon_k \quad \leftarrow \quad \varepsilon_k = E\varepsilon_{k-1}$$

$$\varepsilon_{k+1} = E^2 \varepsilon_{k-1}$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_{k+1} = E^{k+1}\varepsilon_0 \leftarrow \text{errore iniziale}$$

Suppongo che gli autovettori di E siano linearmente indipendenti e che quindi costituiscano una base, e che l'autovalore massimo λ_1 abbia molteplicità 1.

Posso decomporre ε_0 come:

$$\varepsilon_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \qquad (v_1, v_2, v_n \text{ autovettori di } E)$$

$$\varepsilon_k = E^k \varepsilon_0 = E^k (c_1 v_1 + c_2 v_2 + \quad + c_m v_m) =$$

$$= c_1 E^k v_1 + c_2 E^k v_2 + \quad + c_m E^k v_m =$$ dalla definizione di autovettore e autovalore

$$= c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2 + \dots + c_m \lambda_m^k v_m =$$ raccolgo λ_1^k

$$= \lambda_1^k \left[c_1 v_1 + \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k}_{0} c_2 v_2 + \dots + \underbrace{\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^k}_{0} c_m v_m \right]$$

Il metodo converge se l'errore va a zero e l'errore va a zero se e solo se $|\lambda_1| < 1$

$|\lambda_1|$ è chiamato RAGGIO SPETTRALE

Quindi un metodo iterativo converge se e solo se il raggio spettrale della matrice di iterazione E è minore di 1.

JACOBI $\quad E = -F^{-1}(M+N)$

GAUSS-SEIDEL : $\quad x_{k+1} = F^{-1}(b - Mx_{k+1} - Nx_k)$

$$\Downarrow$$

$$F x_{k+1} + M x_{k+1} = b - N x_k$$

$$\Downarrow$$

$$x_{k+1} = (F+M)^{-1}(b - Nx_k)$$

$$\Downarrow$$

$$E = -(F+M)^{-1} N$$

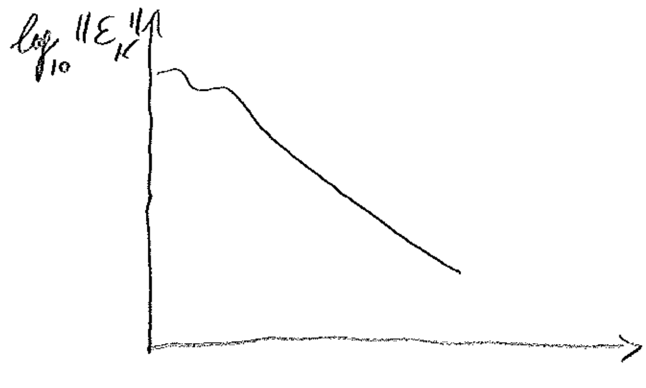
Torniamo all'errore: $\varepsilon_K = E^K \varepsilon_0 \underset{\uparrow}{\cong} \lambda_1^K c_1 v_1$

ASINTOTICAMENTE

Se prendo il logaritmo in base 10 della norma ottengo:

$$\log_{10}\|\varepsilon_K\| = \log_{10}\left(|\lambda_1|^K \cdot \|c_1 v_1\|\right) = \log_{10}\|c_1 \cdot v_1\| + K \log_{10}|\lambda_1|$$

Se riporto l'andamento dell'errore in funzione dell'indice di iterazione su un grafico SEMILOGARITMICO, otterrò una retta



Per tale ragione si dice che: METODI ITERATIVI convergono linearmente.

La stessa espressione dell'errore vale per lo scarto:

$s_K = x_K - x_{K-1}$

Infatti:

$x_{K+1} = E x_K + q$

$x_K = E x_{K-1} + q$ Sottraggo

$s_{K+1} = E s_K$

Posso riportare in grafico semilogaritmico anche l'andamento dello scarto.