Soluzione di Sistemi Lineari

Sistema di equazioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Possiamo scriverlo in forma matriciale

$$A x = b$$

con

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Esempio

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 33 \\ -x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -4 \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & 5 \\ -1 & -6 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE: METODO DI CRAMER

$$A_1 = \begin{bmatrix} 33 & 4 & 5 \\ -4 & -6 & 3 \\ -3 & 2 & -9 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 10 & 33 & 5 \\ -1 & -9 & 3 \\ 5 & -3 & -9 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 33 \\ -1 & -6 & -9 \\ 5 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{369}{369} = 1 \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{738}{369} \quad x_3 = \frac{1092}{369}$$

Il problema è che il metodo di CRAMER richiede il calcolo di $(n+1)$ determinanti di matrici di dimensione n.
Il calcolo del determinante avviene sommando $n!$ contributi ciascuno dei quali richiede $(n-1)$ moltiplicazioni

TROPPO COMPLESSO.

Supponiamo di avere 1 computer da 1 TERAFLOP $\Rightarrow 10^{12}$ op. sec

n	$n!$	t [sec]
3	6	$6 \cdot 10^{-12}$ s
10	3'628'800	$3,6288 \cdot 10^{-6}$ s
15	$1,307 \cdot 10^{12}$	1,307 s
18	$6.4023 \cdot 10^{15}$	6'402 s
20	$2.433 \cdot 10^{18}$	$2.433 \cdot 10^{6}$ s = 28 gg
30	$2,65 \cdot 10^{32}$	$8.41 \cdot 10^{12}$ anni

Vedere complessità determinante delle moltiplicazioni

n	*
2	2
3	$3+3\cdot2$
4	$4+4(3+3\cdot2)$
5	$5+5(4+4(3+3\cdot2))$

$$P(n) = n + nP(n-1)$$

$\Rightarrow$ Se sviluppo $n=5$ ottengo $P = 5 + 5\cdot4 + 5\cdot4\cdot3 + \underbrace{5\cdot4\cdot3\cdot2}_{5!}$

In generale $P(n) = n! \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}$

ELIMINAZIONE DI GAUSS

Dato un sistema GAUSS si propone di trasformare matrice e termine noto in modo tale che A assuma forma triangolare alta. Come facciamo?
Se effettuo una combinazione lineare delle righe della matrice e la stessa combinazione sul termine noto la soluzione non cambia.

Ex.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow Sol = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Moltiplico la prima riga per 2 e la sommo alla seconda ottengo

$$4 * \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} * 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 24 \end{bmatrix}$$

ALGORITMO DI GAUSS

Prendo la prima riga e la combino con quelle sottostanti utilizzando un coefficiente moltiplicativo tale da annullare tutto ciò che sta sotto il primo termine della riga

Ex:

$$-\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} -\tfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -\frac{7}{2} \\ -4 \end{bmatrix} 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -\frac{7}{2} \\ 9 \end{bmatrix}$$

Eseguo la stessa procedura su seconda riga e posizione della seconda colonna:

$$\frac{8}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -\frac{7}{2} \\ 9 \end{bmatrix}\frac{8}{7} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -\frac{7}{2} \\ 5 \end{bmatrix}$$

Perché ho voluto una forma triangolare ??

Perché adesso il sistema è facile da risolvere partendo dalle incognite + basse.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{33}x_3 = b_3$$

1) Ricavo x_3 come b_3/a_{33}

2) Conosco x_3, posso ricavare x_2 come $\frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{23}x_3)$

3) Conosco x_2 e x_3 posso ricavare x_1 come $\frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$

$\Downarrow$

Sostituzione all'indietro

Nel caso specifico ricavo:

$z = 5/5 = 1$

$y = -\frac{2}{7}\left(-\frac{7}{2} - 0\cdot 1\right) = 1$

$x = \frac{1}{2}(13 - 3\cdot 1 - 8\cdot 1) = 1$

Algoritmo (2 fasi).

Fase 1 : Triangolarizzazione

Per l'indice di riga i che varia tra 1 e n

    Per l'indice K che varia tra $(i+1)$ e n

        ! Combino la riga i con la riga K

        $PIVOT = -a_{Ki}/a_{ii}$

        Per l'indice di colonna j che varia tra i e n

            $a_{Kj} = a_{Kj} + PIVOT * a_{ij}$

        Fine per

    Fine per

Fine per

Fase 2 : Sostituzione indietro

Per l'indice di riga i che varia tra n e 1

    ! Calcolo una somma parziale con il contributo

    ! delle incognite già note

    $SUM = 0.d0$

    Per l'indice di colonna j che varia tra $(i+1)$ e n

        $SUM = SUM + a_{ij} * x_j$

    Fine per

    $x_i = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - SUM)$

Fine Per

ESEMPIO

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & 7 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & -6 \end{array}\right] -\frac{4}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Soluzione

$$-x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 2$$

$$\frac{7}{3} x_2 + \frac{7}{3} x_3 = 7 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{7}\left(7 - \frac{7}{3} \cdot 2\right) = 1$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}\left(12 + 1 - 2 \cdot 2\right) = 3$$

CASO PARTICOLARE

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{PIVOTING}$$

SVANTAGGI DI GAUSS

Se devo risolvere lo stesso sistema con un termine noto diverso devo rifare la triangolarizzazione di A per poter ripetere le stesse operazioni sul nuovo termine noto!! Come faccio? "RICORDO" le operazioni che ho fatto e le memorizzo in una matrice TRIANGOLARE BASSA.

DECOMPOSIZIONE LDU: data una matrice A non singolare esiste un'unica decomposizione di A nel prodotto di 3 matrici:

$$A = LDU$$

con L triangolare bassa con diagonale unitaria, D matrice diagonale e U triangolare alta con diagonale unitaria.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo semplificare la decomposizione definendo $\tilde{U} = DU$.
In questo modo otteniamo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{11} & \tilde{u}_{12} & \tilde{u}_{13} \\ 0 & \tilde{u}_{22} & \tilde{u}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{u}_{33} \end{bmatrix}$$

NB: Dobbiamo determinare n^2 coefficienti $l_{21}, l_{31}, l_{32}, u_{11}, u_{12} \dots$

Sviluppo il prodotto LU ed eguaglio ciascun coefficiente del prodotto al coefficiente corrispondente di A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \hline l_{21}u_{11} & u_{22}+l_{21}u_{12} & u_{23}+l_{21}u_{13} \\ \hline l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & u_{33}+l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23} \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= u_{11} \\ a_{12} &= u_{12} \\ a_{13} &= u_{13} \end{aligned}\right\} \text{Prima riga}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{21} &= l_{21}u_{11} \Rightarrow l_{21} = a_{21}/u_{11} \\ a_{22} &= u_{22}+l_{21}u_{12} \Rightarrow u_{22} = a_{22}-l_{21}u_{12} \\ a_{23} &= u_{23}+l_{21}u_{13} \Rightarrow u_{23} = a_{23}-l_{21}u_{13} \end{aligned}\right\} \text{Seconda riga}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{31} &= l_{31}u_{11} \Rightarrow l_{31} = a_{31}/u_{11} \\ a_{32} &= l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} \Rightarrow l_{32} = \frac{1}{u_{22}}\left(a_{32}-l_{31}u_{12}\right) \\ a_{33} &= u_{33}+l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23} \Rightarrow u_{33} = a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23} \end{aligned}\right\} \text{Terza riga}$$

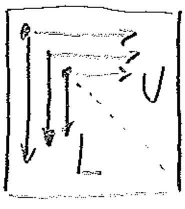
In generale:

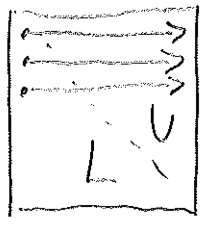
$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \qquad \forall i \leq j$$

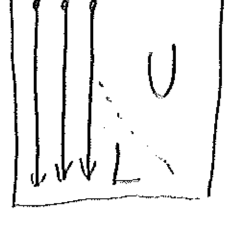
$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}\right) \quad \forall i > j$$

NB: c'è una dipendenza tra i valori di l e u

il calcolo può procedere in 3 modi:

1) 

2) 

3) 

Dopo aver "FATTORIZZATO" A come risolvo il sistema?

$$Ax = b \iff LUx = b$$

Chiamo $Ux = y$, e per trovare x devo risolvere 2 sistemi facili in sequenza

$$Ly = b \to \text{trovo } y \to \text{poi risolvo}$$

$$\hookrightarrow Ux = y \Rightarrow \text{trovo } x$$

Per risolvere $Ly = b$ eseguo una SOSTITUZIONE AVANTI

Per risolvere $Ux = y$ eseguo una SOSTITUZIONE INDIETRO

Altra applicazione della fattorizzazione è il calcolo del determinante di una matrice:

$\det(A) = \det(LU) = \det(L) \cdot \det(U) \Rightarrow$ Per il calcolo del determinante di una matrice triangolare basta fare il prodotto dei termini diagonali!!! (Provare per credere)

Nei codici di calcolo si usa memorizzare L e U nelle stesse posizioni di A: