Informatica

Prova Scritta - 17 luglio 2017

1. Si vuole calcolare l'integrale:

$$I = \int_1^5 \ln(x)dx$$

   (a) Stimare il valore dell'integrale utilizzando la formula di Cavalieri-Simpson con 1 e 2 suddivisioni dell'intervallo $[1;5]$;

   (b) Stimare il valore dell'integrale utilizzando l'estrapolazione di Richardson;

   (c) Calcolare l'errore vero commesso nella stima dell'integrale e verificare che sia coerente con le formule di maggiorazione (solo per Cavalieri-Simpson);

   (d) Stimare il numero minimo di suddivisioni per ridurre l'errore di integrazione al di sotto di 10^{-8}.

2. Sia data la funzione $f(x) = \frac{x}{2+x}$.

   (a) A partire dai valori della funzione nei nodi: $x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.8$, si scriva la tabella delle differenze divise, utilizzando **4 cifre decimali**.

   (b) Si calcoli il polinomio di interpolazione di Newton $P_3(x)$ e lo si valuti in $\bar{x} = 0.6$.

   (c) Si calcoli l'errore di interpolazione che si commette in $\bar{x} = 0.6$: $|E(0.6)| = |f(0.6) - P_3(0.6)|$ e la maggiorazione di tale errore ottenuta con la formula del resto di interpolazione di Lagrange.

   (d) Usando ora i 4 punti definiti in (a) si determini la retta di regressione che minimizza gli scarti verticali $y = a_0 + a_1 x$ e si calcoli l'errore di approssimazione sempre nel punto $\bar{x} = 0.6$.

3. Si vuole risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di dimensione n, mediante il seguente metodo iterativo stazionario:

$$\mathbf{x}_{k+1} = E\mathbf{x}_k + \mathbf{q} \tag{1}$$

   in cui E e' la matrice di iterazione e $\mathbf{q}$ un opportuno vettore, entrambi forniti in Input. Scrivere uno script MATLAB che:

   - legge da un file esterno '*Dati.in*' la dimensione del problema n e la tolleranza di uscita dalle iterazioni *TOLL*;
   - legge sempre dal file '*Dati.in*' la matrice di iterazione E, il vettore $\mathbf{q}$ e l'approssimazione iniziale $\mathbf{x}_0$;
   - esegue le iterazioni in (1) fino a che la norma euclidea del vettore degli scarti $\|\mathbf{s}_{k+1}\|_2 = \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|_2$ non risulti piu' piccola di *TOLL*;
   - stampa il numero di iterazioni eseguite, la norma dello scarto finale e la soluzione in un file esterno '*Risultati.out*'.

   All'interno di ciascuna iterazione si devono eseguire le seguenti operazioni:

   (a) incrementare di una unita' il contatore delle iterazioni, *iter*;

(b) calcolare $\mathbf{x}_{k+1}$ come prodotto di E per $\mathbf{x}_k$ utilizzando la function MATVET che esegue il prodotto matrice vettore: $\mathbf{x}_{k+1} = E\mathbf{x}_k$;

(c) completare il calcolo di $\mathbf{x}_{k+1}$ sommandovi il vettore $\mathbf{q}$: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{q}$;

(d) calcolare il vettore degli scarti: $\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$;

(e) calcolare la norma euclidea di $\mathbf{s}_{k+1}$ con la function EUCL;

(f) aggiornare la soluzione corrente prima di passare alla prossima iterazione.

Scrivere anche le function MATVET e EUCL.

Suggerimenti: si utilizzino due array *X_new* e *X_old* per memorizzare $\mathbf{x}_{k+1}$ e $\mathbf{x}_k$, rispettivamente, e un array *sc* per memorizzare $\mathbf{s}_{k+1}$. Ricordarsi di inizializzare correttamente tutte le variabili necessarie prima di entrare nel ciclo iterativo. La norma eulcidea di un vettore e' la radice quadrata della somma dei quadrati delle sue componenti.

4. Descrivere il metodo di interpolazione con polinomi di Lagrange e l'errore di interpolazione. *Facoltativo: descrivere i polinomi interpolatori di Hermite e relative proprieta'.*

Tempo: 2 ore 30 minuti. (Punteggi: 10,10,8,7).