Informatica

Prova Scritta - 13 luglio 2016

1. Sia data la funzione
$$g(x) = x^3 - 0.5x + 0.2.$$
   (a) Si dimostri che l'equazione $x = g(x)$ ammette una soluzione (ξ_1) in $I_1 = [0, 0.4]$ e un'altra soluzione (ξ_2) in $I_2 = [1, 1.7]$.

   (b) Per ciascuna delle due soluzioni si dica se il metodo di punto fisso converge a partire da un qualunque x_0 preso nel rispettivo intervallo.

   (c) Per entrambi gli intervalli:
   - In caso di convergenza si approssimi la soluzione con 4 iterazioni del metodo di punto fisso usando come x_0 il punto medio dell'intervallo. Si determini la costante asintotica e l'errore all'ultima iterazione.
   - In caso di divergenza si eseguano 2 iterazioni del metodo di punto fisso usando come x_0 il punto medio dell'intervallo, verificando che ci si sta allontanando dalla soluzione.

   (d) Si vuole risolvere ora l'equazione $x = g(x)$ applicando il metodo di Newton alla funzione $f(x) = g(x) - x$. A partire dal punto iniziale $x_0 = 0.707107$, si esegua un'iterazione con il metodo di Newton e si giustifichi il risultato ottenuto.

2. Sia data la matrice A.
$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 7 \\ 12 & 7 & 34 \end{bmatrix}$$
   (a) Sapendo che i due autovalori più grandi di A valgono $\lambda_3 = 41.635, \lambda_2 = 10.020$, si mostri che A è definita positiva senza calcolare il polinomio caratteristico.

   (b) Si fattorizzi la matrice secondo Cholesky $A = LL^T$ e si risolva il sistema $Ax = b$ con $b = [32\ 7\ 11]^T$.

   (c) Utilizzando la fattorizzazione si calcoli $\det A$ e si verifichi che tale risultato è consistente con i dati del punto (a).

   (d) A partire dal fattore triangolare della fattorizzazione di Cholesky si determinino (senza permutazioni di righe e/o colonne) le matrici $\tilde{L}$ triangolare inferiore unitaria e U triangolare superiore della fattorizzazione LU della matrice A tali che $A = \tilde{L}U$.

3. Si vuole risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ di dimensione n, mediante il seguente metodo iterativo stazionario:
$$\mathbf{x}_{k+1} = E\mathbf{x}_k + \mathbf{q} \qquad (1)$$
in cui E e' la matrice di iterazione e $\mathbf{q}$ un opportuno vettore, entrambi forniti in Input. Scrivere uno script MATLAB che:
   - legge da un file esterno '*Dati.in*' la dimensione del problema n e la tolleranza di uscita dalle iterazioni *TOLL*;

- legge sempre dal file '*Dati.in*' la matrice di iterazione E, il vettore $\mathbf{q}$ e l'approssimazione iniziale $\mathbf{x}_0$;
- esegue le iterazioni in (1) fino a che la norma euclidea del vettore degli scarti $\|\mathbf{s}_{k+1}\|_2 = \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|_2$ non risulti piu' piccola di *TOLL*;
- stampa il numero di iterazioni eseguite, la norma dello scarto finale e la soluzione in un file esterno '*Risultati.out*'.

All'interno di ciascuna iterazione si devono eseguire le seguenti operazioni:

(a) incrementare di una unita' il contatore delle iterazioni, *iter*;

(b) calcolare $\mathbf{x}_{k+1}$ come prodotto di E per $\mathbf{x}_k$ utilizzando la function MATVET che esegue il prodotto matrice vettore: $\mathbf{x}_{k+1} = E\mathbf{x}_k$;

(c) completare il calcolo di $\mathbf{x}_{k+1}$ sommandovi il vettore $\mathbf{q}$: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{q}$;

(d) calcolare il vettore degli scarti: $\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$;

(e) calcolare la norma euclidea di $\mathbf{s}_{k+1}$ con la function EUCL;

(f) aggiornare la soluzione corrente prima di passare alla prossima iterazione.

Scrivere anche le function MATVET e EUCL.

Suggerimenti: si utilizzino due array *X_new* e *X_old* per memorizzare $\mathbf{x}_{k+1}$ e $\mathbf{x}_k$, rispettivamente, e un array *sc* per memorizzare $\mathbf{s}_{k+1}$. Ricordarsi di inizializzare correttamente tutte le variabili necessarie prima di entrare nel ciclo iterativo. La norma eulcidea di un vettore e' la radice quadrata della somma dei quadrati delle sue componenti.

4. Descrivere il metodo di interpolazione con polinomi di Lagrange e l'errore di interpolazione. *Facoltativo: descrivere i polinomi interpolatori di Hermite e relative proprieta'.*

Tempo: 2 ore 30 minuti. (Punteggi: 10,10,8,7).