Il metodo di Galerkin si può facilmente generalizzare nel:

Metodo variazionale dei residui pesati:

$$\int_R \underbrace{(Au_n - f)}_{\substack{\Downarrow \\ \text{residuo}}} \underbrace{w_i}_{\substack{\Downarrow \\ \text{peso (test function)}}} \, dR = 0$$

1) Metodo del sottodominio

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ in } R_i \\ 0 & \text{se } x \text{ non è in } R_i \end{cases}$$

2) Collocation:

$$w_i = \delta(x - x_i)$$

$$\int_R (Au_n - f)\,\delta(x - x_i)\,dR =$$

$$= \left[Au_n - f\right]_{x = x_i} = 0$$

3) Minimi quadrati

$$w_i = p(x) \frac{\partial (A u_n - f)}{\partial a_i}$$

cioè:

$$\int_R (A u_n - f)\, p(x)\, A \xi_i \, dR = 0$$

$$\Downarrow$$

min. di:

$$I = \int_R p(x) (A u_n - f)^2 \, dR$$

Esempio: $\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0$ $\quad 0 \le x \le 1 \quad u(0) = u(1) = 0$

x	$u_{teorica}$	$u_{c,2}$	u_Q	u_G	$u_{c,3}$
0.25	0.04401	0.04493	0.04310	0.04408	0.04425
0.50	0.06975	0.07143	0.06807	0.06944	0.06975
0.75	0.06006	0.06221	0.05900	0.06008	0.06038

Soluzione teorica $= \frac{\sin x}{\sin 1} - x$

Approssimazione per u: $\quad u_{app} = x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x)$

Punti di "collocation": per $u_{c,2}$ $(x_1 = 1/4, x_2 = 1/2)$; per $u_{c,3}$ $(x_1 = 1/4, x_2 = 1/2, x_3 = 3/4)$

Consideriamo l'equazione lineare del 2° ordine sul dominio $0 < x < 1$:

$$\mathcal{L}(u) = \frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0$$

$$u = (x - x^2)(\alpha_1 + \alpha_2 x)$$

$$\frac{du}{dx} = (1-2x)(\alpha_1 + \alpha_2 x) + (x - x^2)\alpha_2$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -2(\alpha_1 + \alpha_2 x) + \alpha_2(1-2x) + \alpha_2(1-2x)$$

$$= -2\alpha_1 - 2\alpha_2 x + \alpha_2 - 2\alpha_2 x + \alpha_2 - 2\alpha_2 x$$

$$= -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 6\alpha_2 x =$$

$$= -2\alpha_1 + 2\alpha_2(1-3x)$$

con condizioni al contorno :

$$u = 0 \quad \text{per } x = 0$$
$$u = 0 \quad \text{per } x = 1$$

Approssimiamo u con il seguente polinomio :

$$u = x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x) = (x - x^2)(\alpha_1 + \alpha_2 x) = \alpha_1(x - x^2) + \alpha_2(x^2 - x^3)$$

soddisfacente alle condizioni al contorno. Si trovi α_1 ed α_2 col metodo di collocation prendendo come punti di collocation $x = 1/4$ e $x = 1/2$.

$$du/dx = (1-2x)(\alpha_1 + \alpha_2 x) + \alpha_2(x - x^2)$$

R. Il residuo è :

$$d^2u/dx^2 = -2(\alpha_1 + \alpha_2 x) + \alpha_2(1-2x) + \alpha_2(1-2x) = -2\alpha_1 + 2\alpha_2(1-3x)$$

$$\varepsilon = \mathcal{L}(u) = x + (-2 + x - x^2)\alpha_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)\alpha_2$$

Imponendo che sia nullo sui due punti assegnati otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{29}{16} & -\frac{35}{64} \\ 7/4 & 7/8 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{Bmatrix}$$

la cui soluzione dà : $\alpha_1 = \frac{42}{217}$ e $\alpha_2 = \frac{40}{217}$ e quindi la soluzione approssimata :

$$u = \frac{x(1-x)}{217}(42 + 40x)$$

O.K. corretta
il 22.8.81

La soluzione esatta è :

$$u_{vera} = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$$

Un confronto con la soluzione approssimata mostra i seguenti valori :

x	$u_{app., colloc.}$	u_{vera}
0.25	0.04493	0.044014
0.50	0.07143	0.069757
0.75	0.06221	0.060086

4) Risolvere la stessa equazione precedente col metodo dei minimi quadrati ed usando la stessa funzione approssimante.

R. α_1 ed α_2 sono scelti in modo tale da minimizzare l'integrale:

$$\varepsilon = x + (-2+x-x^2)\alpha_1 + (2-6x+x^2-x^3)\alpha_2$$

$$\int_0^1 \varepsilon^2 dx = \int_0^1 \left[x + (-2+x-x^2)\alpha_1 + (2-6x+x^2-x^3)\alpha_2\right]^2 dx = \min$$

Derivando rispetto α_1 ed α_2 si ottengono due equazioni:

$$\int_0^1 \varepsilon(-2+x-x^2)\,dx = 0$$

$$\int_0^1 \varepsilon\,(2-6x+x^2-x^3)\,dx = 0$$

Risolvendo gli integrali si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{pmatrix} 202 & 101 \\ 101 & \frac{1572}{7} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 55 \\ 57 \end{Bmatrix}$$

la cui soluzione dà:

O.k corretta il 24.8.81

$$\alpha_1 \simeq 0.18754 \qquad \alpha_2 \simeq 0.16947$$

Confrontiamo con la soluzione vera:

x	$u_{app. min. quad.}$	u_{vera}
0.25	0.04310	0.044014
0.50	0.06807	0.069757
0.75	0.05900	0.060086

La stessa domanda dell'esercizio 3) prendendo più di 2 punti come punti di collocation e risolvendo il sistema sovradeterminato che ne risulta nel senso dei minimi quadrati:

R. Si scelgano i 3 punti $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$ e $x_3 = 3/4$. Si hanno corrispondentemente i 3 residui:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -29/16 & 35/64 \\ -7/4 & -7/8 \\ -29/16 & -151/64 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{Bmatrix} \qquad \varepsilon^T = \{\alpha_1 \ \alpha_2\} \begin{pmatrix} -\frac{29}{16} & -7/4 & -\frac{29}{16} \\ 35/64 & -\frac{7}{8} & -\frac{151}{64} \end{pmatrix} + \left\{ \frac{1}{4} \ \ \frac{1}{2} \ \ \frac{3}{4} \right\}$$

I parametri α_1 ed α_2 sono ottenuti minimizzando il prodotto scalare

$$\Omega = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \{\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3\} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \varepsilon^T \varepsilon$$

cioè: $\left(-\frac{29}{16}\alpha_1 + \frac{35}{64}\alpha_2 + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{7}{4}\alpha_1 - \frac{7}{8}\alpha_2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{29}{16}\alpha_1 - \frac{151}{64}\alpha_2 + \frac{3}{4}\right)^2 = \Omega$

$$\Omega = \left[\{\alpha_1 \ \alpha_2\} \begin{pmatrix} -29/16 & -7/4 & -29/16 \\ 35/64 & -7/8 & -151/64 \end{pmatrix} + \left\{ \frac{1}{4} \ \frac{1}{2} \ \frac{3}{4} \right\} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} -\frac{29}{16} & \frac{35}{64} \\ -7/4 & -7/8 \\ -29/16 & -\frac{151}{64} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{Bmatrix} \right]$$

Le derivate di Ω rispetto ad α_1 ed α_2 sono:

$$\begin{pmatrix} -29/16 & -7/4 & -29/16 \\ 35/64 & -7/8 & -151/64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{29}{16} & 35/64 \\ -7/4 & -7/8 \\ -29/16 & -\frac{151}{64} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} -29/16 & -7/4 & -29/16 \\ 35/64 & -7/8 & -151/64 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{d\Omega}{d\alpha_1} = \left(-\frac{29}{16}\alpha_1 + \frac{35}{64}\alpha_2 + \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{29}{16}\right) + \left(-\frac{7}{4}\alpha_1 - \frac{7}{8}\alpha_2 + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{7}{4}\right) + \left(-\frac{29}{16}\alpha_1 - \frac{151}{64}\alpha_2 + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{29}{16}\right) = 0$$

Uguagliando a zero ed eseguendo i calcoli:

$$\begin{pmatrix} 9.66 & 4.82 \\ 4.82 & 6.61 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.69 \\ 2.06 \end{Bmatrix}$$

O.k. verificate le soluzioni [illegible]!

da cui $\alpha_1 = 0.19297$ $\alpha_2 = 0.17204$ → (soluzione in APL al problema sovradeterminato originale)

Effettuiamo il solito confronto:

x	u_{app}, 2 punti	u_{app}, 3 punti	u_{vera}
0.25	0.04493	0.04425	**0.04401**
0.50	0.07143	0.06975	**0.06975**
0.75	0.06221	0.06038	**0.06006**

6) Risolvere l'equazione dell'esercizio 3) col metodo di Galerkin.

R. Imponendo l'ortogonalità tra il residuo ε e le due funzioni base $x(1-x)$ e $x^2(1-x)$ otteniamo le due equazioni:

$$\int_0^1 \varepsilon\, x(1-x)\,dx = 0 \qquad \varepsilon = x + (-2 + x - x^2)\alpha_1 + (2 - 6x + x^2 - x^3)\alpha_2$$

$$\int_0^1 \varepsilon\, x^2(1-x)\,dx = 0$$

Integrando otteniamo il sistema:

$$\begin{pmatrix} 3/10 & 3/20 \\ 3/20 & 13/105 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/12 \\ 1/20 \end{Bmatrix}$$

da cui $\alpha_1 = 71/369$ e $\alpha_2 = 7/41$

La soluzione approssimata è dunque:

$$u = x(1-x)\left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x\right) \qquad \text{(O.K. verificato)}$$

e il confronto con la soluzione vera mostra i seguenti valori:

x	$u_{galerkin}$	u_{vera}
0.25	0.04408	**0.04401**
0.50	0.06944	**0.06975**
0.75	0.06008	**0.06006**

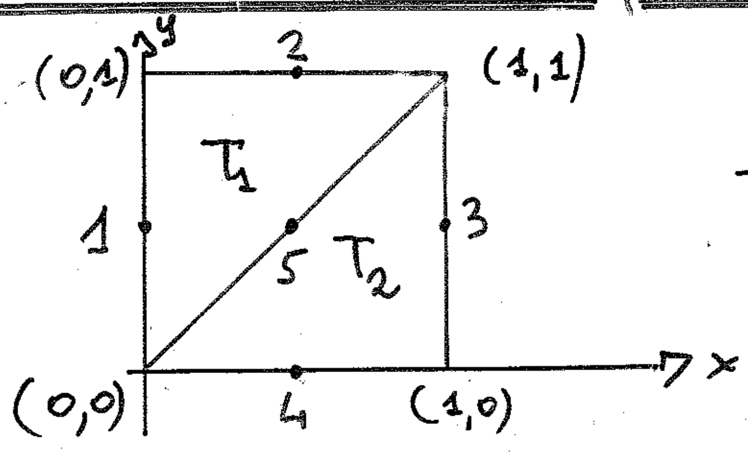
Si noti che i risultati del metodo di Galerkin sono migliori degli altri.

Elementi finiti non conformi - Patch test

Gli elementi si dicono "non conformi" quando su ciascun elemento finito si usano polinomi di grado m e le derivate di ordine m-1 sono discontinue nelle frontiere di elementi contigui (es. polinomi lineari di interpolazione su triangoli che violassero la continuità della funzione sui lati).

Il "patch test" stabilisce quando FEM converge su elementi non conformi. Esso si enuncia così: sia r l'ordine max di derivata nel funzionale; le funzioni base non conformi siano costituite da polinomi di grado r; infine si scelga una soluzione esatta u e si impongano su un insieme (patch) di elementi le bc dettate dalla soluzione prescelta. Il patch test è positivo se il metodo di Ritz dà una soluzione, sugli elementi del patch, che coincide esattamente con la soluzione prescelta.

Esempio di elemento non conforme.



$$T = T_1 + T_2$$

"Patch" di 2 triangoli T_1 e T_2 non conformi

Funzionale di Laplace: $\Omega(u) = \frac{1}{2}\iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$

Rappresentazione lineare di u su T_1 e T_2:

$$u^{(1)} = (1-2x)u_1 - (1-2y)u_2 + (1+2x-2y)u_5 \quad \text{su } T_1$$

$$u^{(2)} = -(1-2x)u_3 + (1-2y)u_4 + (1-2x+2y)u_5 \quad \text{su } T_2$$

Lungo l'ipotenusa $u^{(1)}(x,y) \neq u^{(2)}(x,y)$ (tranne che in x_5, y_5). Quindi gli elementi sono non-conformi.

Una griglia triangolare fatta di elementi non conformi consentirebbe al FEM di convergere?

Per rispondere alla domanda fissiamo la soluzione test:

$$u = x + y$$

che soddisfa l'eq. di Laplace. Essa dà sui nodi del contorno del patch i valori:

$$u_1 = u_4 = 1/2 \qquad u_2 = u_3 = 3/2$$

Questi valori sono le b.c. sul patch. Imponendo che $u^{(1)}$ ed $u^{(2)}$ soddisfino si produce:

$$u^{(1)} = (-1-x+3y) + (1+2x-2y)u_5 \quad \text{su } T_1$$

$$u^{(2)} = (-1+3x-y) + (1-2x+2y)u_5 \quad \text{su } T_2$$

Sostituiamo $u^{(1)}$ e $u^{(2)}$ nel funzionale (su T_1 e T_2, rispettivamente) e minimizziamolo (per rispetto a u_5):

$$\frac{\partial}{\partial u_5}\left\{\left[\frac{1}{2}\iint_{T_1}\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy + \left[\frac{1}{2}\iint_{T_2}\left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\right\} = 0$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = -1+2u_5$$

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} = 3-2u_5 \,;\quad \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = 3-2u_5$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} = -1+2u_5$$

Risolvendo si ottiene

$$u_5 = 1$$

che sostituito in $u^{(1)}$ ed $u^{(2)}$ dà:

$$u^{(1)} = u^{(2)} = x+y = u$$

cioè la soluzione prescelta. Dunque gli elementi non conformi passano il "patch test", FEM converge su questi elementi all'aumentare della risoluzione

Perche gli elementi non conformi potrebbero dare problemi di convergenza? Perchè la discontinuità della rappresentazione, nel caso presente su T_1 e T_2, provoca valore ∞ della derivata, e questo potrebbe fare perdere contributi all'integrale del funzionale sulle frontiere di elementi contigui.