Metodo variazionale di Ritz

Soluzione approssimata nello spazio S_n:

$$\bar{u}_n = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots a_n \xi_n$$

con ξ_i funzione base o di forma i-esima.

Si considera $\Omega(\bar{u}_n)$ e si minimizza Ω in S_n:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \dots n$$

$\Downarrow$

n equazioni algebriche (lineari se Ω è quadratico)

Esempio

$$\Omega(u) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(u')^2 + \alpha u\right] dx \qquad (1)$$

con $u(0) = u(1) = 0$

Funzioni base: $1, x, x^2, x^3, \dots$

$$u_n = x(1-x) \sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1} \quad \text{soddisfa le b.c.}$$

$$u_1 = a_1 x(1-x)$$

Sostituiamo in (1) e deriviamo rispetto a_1:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_1} = \frac{\partial}{a_1} \int_0^1 \left[\frac{1}{2} a_1^2 (1-2x)^2 + \alpha a_1 (1-x) x\right] dx =$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_1} = \int_0^1 \left[a_1 (1-2x)^2 + \alpha x(1-x) \right] dx = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 = -\alpha/2$$

$$\Downarrow$$

$$u_1 = -\frac{\alpha}{2} x(1-x)$$

Si verifica che con u_n ed $n \neq 1$ sarebbe $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$

cioè u_1 = soluzione esatta

Altra base:

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(i\pi x) \quad \text{soddisfa le bc.}$$

$$\Downarrow$$

$$u_1 = a_1 \sin \pi x$$

Minimizzando $\Omega(a_1)$:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1} \int_0^1 \left[\frac{1}{2} a_1^2 \pi^2 \cos^2 \pi x + \alpha a_1 \sin \pi x \right] dx$$

$$= \int_0^1 (a_1 \pi^2 \cos^2 \pi x + \alpha \sin \pi x) dx = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 = -\frac{4\alpha}{\pi^3}$$

$$\Downarrow$$

$$u_1 = -\frac{4\alpha}{\pi^3} \sin \pi x$$

x	$u_1 = u = -\frac{\alpha}{2}x(1-x)$	$u_1 = -\frac{4\alpha}{\pi^3}\sin(\pi x)$
0	0	0
0.25	-0.094α	-0.091α
0.5	-0.125α	-0.129α
1	0	0

Concetti di:

1- Base prescelta → velocità di convergenza
→ efficienza numerica

2- completezza della base:

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(2\pi i x)$$

verrebbe $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$
perché la base è <u>incompleta</u>

3- complessità del funzionale con funzioni base complesse. Ergo privilegiare funzioni base semplici che poi significa elementi finiti semplici (e.g. triangoli in 2-D e tetraedri in 3-D)

Metodo variazionale di Galerkin

$$Au(x_i) = f(x_i)$$ Soluzione approssimata:

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i(x)$$

Principio variazionale:

$$\Omega(u) = -\frac{1}{2} \langle Au, u \rangle + \langle f, u \rangle + \dots$$

Ricerca minimo approssimato:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \Omega(u_n) = \frac{\partial}{\partial a_i} \left\{ -\frac{1}{2} \int_R A u_n \cdot u_n \, dR + \int_R f u_n \, dR \right\} = 0$$

Derivando sotto il segno:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_R A u_n \cdot u_n \, dR = \int_R \left\{ A\left(\frac{\partial u_n}{\partial a_i}\right) u_n + A u_n \frac{\partial u_n}{\partial a_i} \right\} dR =$$

$$= \int_R \left\{ A \xi_i \cdot u_n + A u_n \cdot \xi_i \right\} dR = 2 \int_R A u_n \xi_i \, dR$$

essendo A autoaggiunto o simmetrico

Possiamo così scrivere:

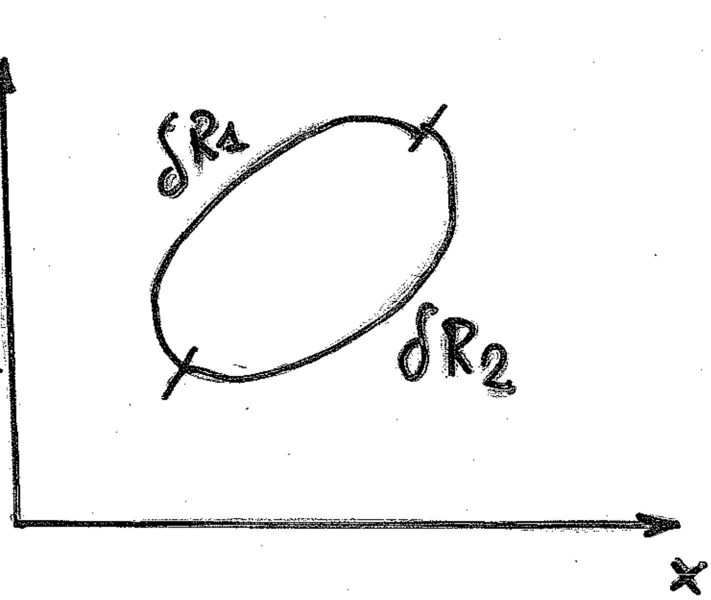
$$\boxed{\int_R (A u_n - f) \xi_i \, dR = 0} \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

$\Downarrow$

Equazioni di Galerkin

Esempio di applicazione del metodo di Galerkin:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_y \frac{\partial h}{\partial y}\right) = f(x,y)$$



$$h_n = \sum_{i=1}^{n} q_i \xi_i(x,y) + w(x,y)$$

$$\int_R \left[\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x \frac{\partial h_n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_y \frac{\partial h_n}{\partial y}\right)\right\} - f\right] \xi_i \, dx\, dy$$

$$+ \int_{\delta R_2} \left(q - T_x \frac{\partial h_n}{\partial x} n_x - T_y \frac{\partial h_n}{\partial y} n_y\right) \xi_i \, d\Gamma = 0$$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\text{Eq. di Galerkin}}$

1ª identità di Green:

$$-\int_R \left(T_x \frac{\partial h_n}{\partial x} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + T_y \frac{\partial h_n}{\partial y} \frac{\partial \xi_i}{\partial y}\right) dx\, dy \; +$$

$$\int_{\delta R_2} \left(T_x \frac{\partial h_n}{\partial x} \cancel{n_x + T_y \frac{\partial h_n}{\partial y}} n_y\right) \xi_i \, d\Gamma - \cancel{\int_{\delta R_2} (\quad) \, d\Gamma}$$

$$+ \int q \xi_i \, d\Gamma = \int f \xi_i \, dx\, dy$$

$$\int_R \left(T_x \frac{\partial h_n}{\partial x} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + T_y \frac{\partial h_n}{\partial y} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \right) dx\,dy - \int_{\partial R_2} q \xi_i \, d\Gamma + \int_R f \xi_i \, dx\,dy = 0$$

che coincide con l'eq. di Ritz per funzionale quadratico (problema lineare). Pertanto l'eq. può essere definito (in questo caso) di:

Ritz - Galerkin

Infatti se prendiamo il funzionale quadratico:

$$\Omega(h) = \iint_R \left\{ \frac{1}{2} \left[T_x \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + T_y \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] + f h \right\} dx\,dy - \int_{\partial R_2} q h \, ds$$

e scriviamo $h_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i (x,y)$ e

sostituiamo in Ω derivando rispetto ad a_i:

$$\frac{\partial \Omega(h_n)}{\partial a_i} = \iint_R \left[\left(T_x \frac{\partial h_n}{\partial x} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + T_y \frac{\partial h_n}{\partial y} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \right) + f \xi_i \right] dx\,dy - \int_{\partial R_2} q \xi_i \, ds = 0$$

essendo

$$\frac{\partial h_n}{\partial x} = a_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \dots + a_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \dots + a_n \frac{\partial \xi_n}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial y} = a_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \dots + a_i \frac{\partial \xi_i}{\partial y} + \dots + a_n \frac{\partial \xi_n}{\partial y}$$