Deduzione di principi variazionali

B.V.P. :

$$Au(x_i) = f(x_i)$$
$$G_n u(x_i) = 0 \qquad (1)$$

A = operatore differenziale lineare su R
G_n = oper. differenziali lineari su segmenti Γ_n di contorno

A è auto-aggiunto (simmetrico) se

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle \qquad \text{prodotto scalare}$$

per ogni u e v soddisfacenti le bc omogenee

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle = \int_R u(x_i)\, v(x_i)\, dR$$

Generalizzazione prodotto scalare tra vettori:

$$u^T v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Stessa generalizzazione della proprietà di "simmetria":

$$u^T A v = v^T A u \quad , A = \text{matrice}; u, v = \text{vettori}$$

Un operatore differenziale A è simmetrico d.p.:

$$\langle Au, u \rangle > 0$$

per ogni u soddisfacente le bc omogenee.

Sia A op. differenziale simmetrico d.p. e $u_0(x_i)$ la soluzione del bvp (1).

Costruiamo un funzionale:

$$I(u) = \int_R (Au-f)(u-u_0)\,dR = \int_R A(u-u_0)(u-u_0)\,dR > 0$$

per ogni u arbitraria che soddisfa le bc di (1)

NB $Au-f$ = residuo ; $u-u_0$ = errore

$I(u)$ sempre >0 tranne $I(u)=0$ per $u \equiv u_0$

Sviluppiamo $I(u)$ e ricordiamoci della simmetria di A:

$$I(u) = \int_R u\,Au\,dR - \int_R Au\,u_0\,dR - \int_R Au_0\,u\,dR + \int_R Au_0\,u_0\,dR =$$

$$= \int_R u\,Au\,dR - \int_R Au_0\,u\,dR - \int f u\,dR + \int_R Au_0\,u_0\,dR =$$

$$= \int_R u\,Au\,dR - 2\int_R f u\,dR + \underbrace{\int_R f u_0\,dR}_{\text{indipendente da } u}$$

Funzionale: $\boxed{\Omega(u) = -\frac{1}{2}\int_R u\,Au\,dR + \int_R f u\,dR}$

Esempio (op. di Laplace):

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Dimostriamo che A-Laplace è simmetrico d.p. (in 1-D)

$$\langle Au, v\rangle = \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) v\,dx = \cancel{\frac{\partial u}{\partial x} v\Big|_0^L} - \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\,dx =$$

$$= -\cancel{u\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_0^L} + \int_0^L \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} u\,dx = \langle Av, u\rangle \quad \text{simmetrico}$$

Inoltre $\langle u, Au\rangle = -\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx < 0$ d.n.

Dunque il funzionale sarebbe (x Laplace):

$$\Omega(u) = -\frac{1}{2}\int_R \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) u\,dR + \int_R u f\,dR$$

1ª identità di Green:

$$-\frac{1}{2}\int_R \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) u\,dR = \frac{1}{2}\int_R \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dR - \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} u\,d\Gamma}}_{=0}$$

Pertanto $\Omega(u)$ diventa:

$$\boxed{\Omega(u) = \frac{1}{2}\int_R \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dR + \int_R f u\,dR}$$

che è una espressione che già conosciamo bc non omogenee:

$$G_n^u(x_i) = g_n(x_i)$$

Occorre modificare il funzionale. Esempio: $A = \Delta^2$

$$I(u) = \int_R \Delta^2(u-u_0)(u-u_0)\,dR = \int_R u\Delta^2 u\,dR - \int_R \Delta^2 u\, u_0\,dR - \int_R uf\,dR + \int_R f u_0\,dR \geq 0$$

con u arbitraria soddisfacente le bc non omogenee

Applichiamo 2 volte la 1ª identità di Green:

$$I(u) = \int_R \Delta^2 u\, u_0\,dR = -\int_R \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)dR + \int_{\partial\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u_0\,d\Gamma$$

$$= \int_R \underbrace{\Delta^2 u_0}_{f}\, u\,dR + \int_{\partial\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u_0\,d\Gamma - \int_{\partial\Gamma} u\frac{\partial u_0}{\partial n}\,d\Gamma$$

Ora $\Delta^2 u_0 = f$. Pertanto:

$$I(u) = \int_R u\Delta^2 u\,dR - \int_R 2uf\,dR \underbrace{- \int_{\partial\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}u_0\,d\Gamma + \int_{\partial\Gamma} u\frac{\partial u_0}{\partial n}\,d\Gamma}_{\text{nuovi integrali di linea assenti prima}} + \overbrace{\int_R u_0 f\,dR}^{\text{indipendente da } u}$$

Ora se $u \equiv u_0 \rightarrow I(u_0) = 0$ = minimo

Il funzionale (più generale del precedente) è dunque:

$$\boxed{\Omega(u) = -\frac{1}{2}\int_R u\Delta^2 u\,dR + \int_R uf\,dR + \frac{1}{2}\int_{\partial\Gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial n}u_0 - \frac{\partial u_0}{\partial n}u\right)d\Gamma}$$

Applicando 1 volta il lemma di Green:

$$\Omega(u) = \frac{1}{2}\int_R \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dR + \int_R u f dR -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial\Gamma} u\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u_0}{\partial n}\right) d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{\partial\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u_0 \, d\Gamma$$

Se u è assegnato su Γ allora resta $\overbrace{-\frac{1}{2}\int_{\partial\Gamma} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} d\Gamma}^{\text{indipendente da } u}$

Il funzionale è: $\Omega(u) = \frac{1}{2}\int_R \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dR + \int_R u f dR$

Se invece è assegnato $q = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u_0}{\partial n}$ si ha

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial\Gamma} u\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u_0}{\partial n}\right) d\Gamma = -\int_{\partial\Gamma} q u \, d\Gamma$$

Il termine $\frac{1}{2}\int_{\partial\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u_0 d\Gamma = \frac{1}{2}\int_{\partial\Gamma} q u_0 d\Gamma$ non dipende da u

Il funzionale da minimizzare diventa:

$$\boxed{\Omega(u) = \frac{1}{2}\int_R \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dR + \int_R u f dR - \int_{\partial\Gamma} q u \, d\Gamma}$$

Contorni misti: $\partial\Gamma$ viene sostituito con $\partial\Gamma_2$

Esempio di operatore A non simmetrico

Eq. di convezione - diffusione :

$$D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-v_x\frac{\partial u}{\partial x}-v_y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$A=D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-v_x\frac{\partial}{\partial x}-v_y\frac{\partial}{\partial y}$$

Dimostriamo la non-simmetria in 1-D :

$$I_1=\int_0^L\frac{\partial u}{\partial x}v\,dx=\cancel{uv}\Big|_0^L-\int_0^L u\frac{\partial v}{\partial x}dx=-\int_0^L u\frac{\partial v}{\partial x}dx$$

$$I_2=\int_0^L\frac{\partial v}{\partial x}u\,dx=\cancel{uv}\Big|_0^L-\int_0^L v\frac{\partial u}{\partial x}dx=-\int_0^L v\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$$\boxed{I_1\neq I_2}$$

Principio variazionale ristretto :

$$A=D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$f=v_x\frac{\partial u}{\partial x}+v_y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\downarrow$$

$$\Omega(u)=\int_R\left\{\frac{1}{2}D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+\right.$$

$$\left.+\underbrace{\left(v_x\frac{\partial u}{\partial x}+v_y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)}_{\text{invariante nel processo di minimizzazione}}u\right\}dR-\int_{\partial\Gamma}qu\,d\Gamma$$

Alternativa: trasformazione di A in un operatore simmetrico.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,y)\, D\,\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[g(x,y)\, D\,\frac{\partial u}{\partial y}\right]=g(x,y)\frac{\partial u}{\partial t} \quad (0)$$

Questa è l'eq. di diffusione. Sviluppiamo:

$$D\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+Dg\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+D\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+Dg\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g\frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

Riordiniamo l'eq. di diffusione - convezione:

$$-g v_x\frac{\partial u}{\partial x}+gD\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-g v_y\frac{\partial u}{\partial y}+gD\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g\frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

Moltiplichiamo per g l'eq (2). Essa coincide con (1) se:

$$\begin{cases} D\dfrac{\partial g}{\partial x}=-g v_x \\ D\dfrac{\partial g}{\partial y}=-g v_y \end{cases} \longrightarrow \quad g(x,y)=\exp\left[-\frac{v_x}{D}x-\frac{v_y}{D}y\right]$$

L'eq. (0) diventa:

$$D\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-\frac{v_x}{D}x-\frac{v_y}{D}y}\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-\frac{v_x}{D}x-\frac{v_y}{D}y}\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}=e^{-\frac{v_x}{D}x-\frac{v_y}{D}y}\frac{\partial u}{\partial t}$$

con principio variazionale (funzionale) associato:

$$\Omega(u)=\int_R \frac{D}{2}\left\{e^{-\frac{v_x}{D}x-\frac{v_y}{D}y}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy\; +$$
$$+\int_R e^{-\frac{v_x}{D}x-\frac{v_y}{D}y}\frac{\partial u}{\partial t}\,u\,dx\,dy \quad +$$

Con bc di Neumann: $-\int_{\Gamma} e^{-\frac{v_x}{D}x-\frac{v_y}{D}y}\, q\, u\, d\Gamma$