Splines

Forma naturale della spline cubica su $x_0 = 0$ e $x_n = b$:

$$S_3\left(\frac{x}{h}\right) = \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{x}{h}\right) + \alpha_2\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \alpha_3\left(\frac{x}{h}\right)^3 + \sum_{s=1}^{n-1} \beta_s \left(\frac{x}{h} - s\right)_+^3$$

dove:

$$\left(\frac{x}{h} - s\right)_+ = \begin{cases} 0 & (x/h \leq s) \\ \frac{x}{h} - s & (x/h > s) \end{cases}$$

$S_3\left(\frac{x}{h}\right)$ è continua (fino alle derivate 2^e) sugli $n-1$ punti interni all'intervallo $0 \vdash\!\dashv b$ per qualunque valore degli $(n+3)$ coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$.

Questi si trovano imponendo che S_3 onori i dati:

$$S_3(x_i/h) = f_i \qquad i = 0, 1, \dots, n.$$

Si ottengono $n+1$ equazioni lineari negli α e β. Due possono essere fissati ad arbitrio.

Poichè gli α e i β sono funzioni lineari del termine noto f_i $(i = 0, 1, \dots, n)$, se sostituiamo la loro espressione nella $S_3(x/h)$ otteniamo:

10

$$S_3\left(\frac{x}{h}\right) = \sum_{i=0}^{n} f_i C_i\left(\frac{x}{h}\right)$$ con $C_i\left(\frac{x}{h}\right)$ funzioni

$$S_3\left(\frac{x}{h}\right) = \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{x}{h}\right) + \alpha_2\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \alpha_3\left(\frac{x}{h}\right)^3 + \sum_{s=1}^{n-1} \beta_s\left(\frac{x}{h} - s\right)_+^3$$

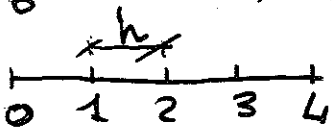
$\frac{x}{h} \rightarrow$ 0 —— 1
$$S_3\left(\frac{x}{h}\right) = \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{x}{h}\right) + \alpha_2\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \alpha_3\left(\frac{x}{h}\right)^3$$

$\frac{x}{h} \rightarrow$ 1 —— 2
$$S_3\left(\frac{x}{h}\right) = \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{x}{h}\right) + \alpha_2\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \alpha_3\left(\frac{x}{h}\right)^3 + \beta_1\left(\frac{x}{h} - 1\right)^3$$

$\frac{x}{h} \rightarrow$ 2 —— 3
$$S_3\left(\frac{x}{h}\right) = \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{x}{h}\right) + \alpha_2\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \alpha_3\left(\frac{x}{h}\right)^3 + \beta_1\left(\frac{x}{h} - 1\right)^3 + \beta_2\left(\frac{x}{h} - 2\right)^3$$

Le derivate prime e seconde sono continue nei punti di appoggio qualunque siano i valori di $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$.

Esempio con $x_0 = 0$ ed $n = 4$. Poniamo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$



$$
\begin{array}{ll}
x_0 \longmapsto x_1 & S_3(x/h) = \alpha_0 + \alpha_3 (x/h)^3 \\
x_1 \longmapsto x_2 & \quad " \;\; = \;\; " \qquad " \quad + \beta_1 \left(\frac{x}{h} - 1\right)^3 \\
x_2 \longmapsto x_3 & \quad " \;\; = \;\; " \qquad " \qquad " \quad + \beta_2 \left(\frac{x}{h} - 2\right)^3 \\
x_3 \longmapsto x_4 & \quad " \;\; = \;\; " \qquad " \qquad " \qquad " \quad + \beta_3 \left(\frac{x}{h} - 3\right)^3
\end{array}
$$

Imponendo che S_3 "onori" le osservazioni:

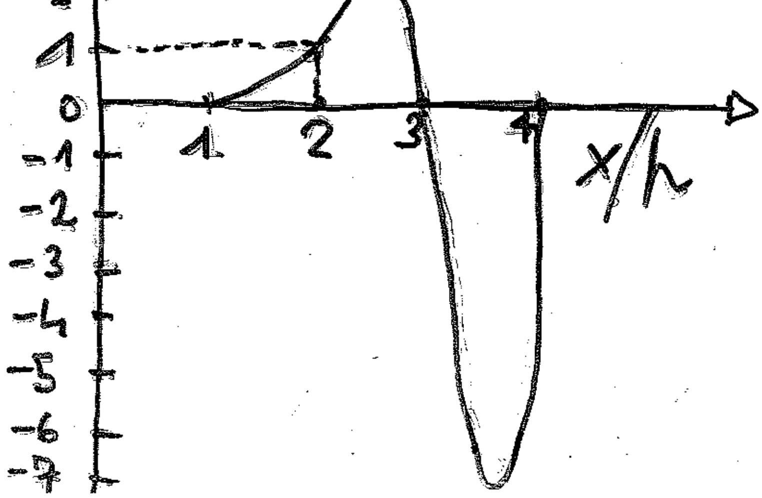
$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= f_0 \\
\alpha_3 &= f_1 - \alpha_0 = f_1 - f_0 \\
\beta_1 &= f_2 - 8\alpha_3 - \alpha_0 = f_2 - 8f_1 + 7f_0 \\
\beta_2 &= f_3 - 8\beta_1 - 27\alpha_3 - \alpha_0 = f_3 - 8f_2 + 37f_1 - 30f_0 \\
\beta_3 &= f_4 - 8\beta_2 - 27\beta_1 - 64\alpha_3 - \alpha_0 = f_4 - 8f_3 + 37f_2 - 144f_1 + 114f_0
\end{aligned}
$$

Sostituendo in S_3 si trovano le funzioni base $C_i(x/h)$.

Ad es. si ha:

$$
C_2\left(\frac{x}{h}\right) = \left(\frac{x}{h} - 1\right)_+^3 - 8\left(\frac{x}{h} - 2\right)_+^3 + 37\left(\frac{x}{h} - 3\right)_+^3
$$

N.B.: $C_2\left(\frac{x}{h}\right)$ non ha supporto locale



Interpolazioni 2-D

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = d$$

Interpolazione in 2 step: prima lungo y (con x fisso) e poi lungo x:

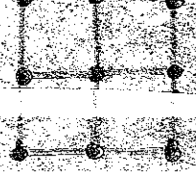
$$f(x,y) \simeq \sum_{j=0}^{m} l_j(y)\, f(x, y_j)$$
$$\Downarrow$$
$$f(x,y) \simeq \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} l_i(x)\, l_j(y)\, f(x_i, y_j)$$

Analogamente in 3-D:

$$f(x,y,z) \simeq \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{p} l_i(x)\, l_j(y)\, l_k(z)\, f(x_i, y_j, z_k)$$

Polinomi di base ottenuti come prodotto di polinomi 1-D di base di Lagrange (detti "tensor-product basis function")

Siano $l_i(x)$ ed $l_j(y)$ polinomi di base quadratici ne risulta un polinomio "biquadratico" con 9 termini:



elemento biquadratico

Il polinomio "biquadratico" base ha espressione generale:

$$g_{ij}(x,y) = l_i(x)\, l_j(y) = (a_0' + a_1' x + a_2' x^2)(b_0 + b_1 y + b_2 y^2)$$

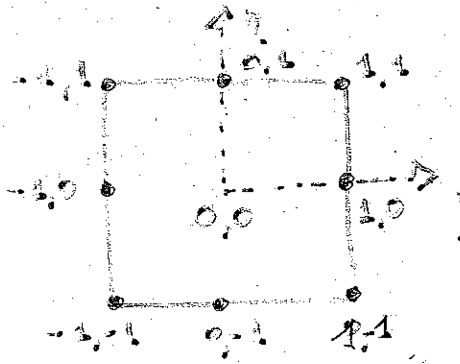
cioè è il prodotto di due funzioni quadratiche in x ed y

I coefficienti di $l_i(x)$ ed $l_j(y)$ si trovano separatamente come soluzione di due problemi separati mono-dimensionali.

La combinazione lineare delle g_{ij} è un pol. biquadratico: $f(x,y) \simeq a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 x^2 y + a_7 x y^2 + a_8 x^2 y^2$

cioè separatamente quadratico in x ed y

Elementi "Serendipity" dei "3 principi di Serendip":



$$g_{ij}(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 x^2 y + a_7 x y^2$$

C'è un polinomio base g_{ij} per ogni nodo i,j: i coefficienti si trovano scrivendo le 7 equazioni: $g_{ij}(x_k, y_l) = \delta_{ik}\delta_{jl}$

Polinomi biquadratici e Serendipity in riferimento locale ξ ed η

	LAGRANGE	SERENDIPITY
Bilineare	$\frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)$	$\frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)$
Biquadratici	nodo centrale $(1-\xi^2)(1-\eta^2)$	
Angolo	$\frac{1}{4}\xi\xi_i(1+\xi\xi_i)\,\eta\eta_i(1+\eta\eta_i)$	$\frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)\cdot(\xi\xi_i+\eta\eta_i-1)$
nodo centrale sui lati $(0,\eta_j)$	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)\,\eta\eta_j(1+\eta\eta_j)$	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_j)$
[illegible]	[illegible]	$\frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2)$ [illegible]

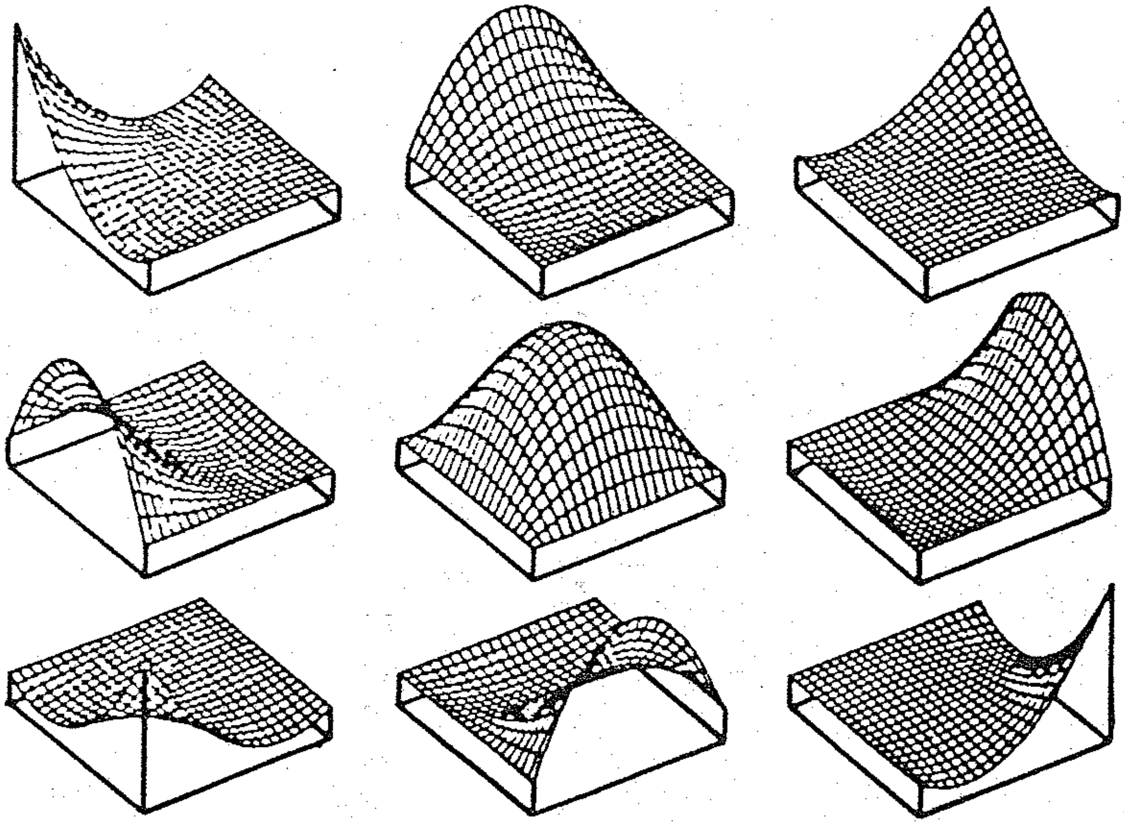


Figure 2-5. Tensor-product quadratic basis functions (after Botha and Pinder, 1983).

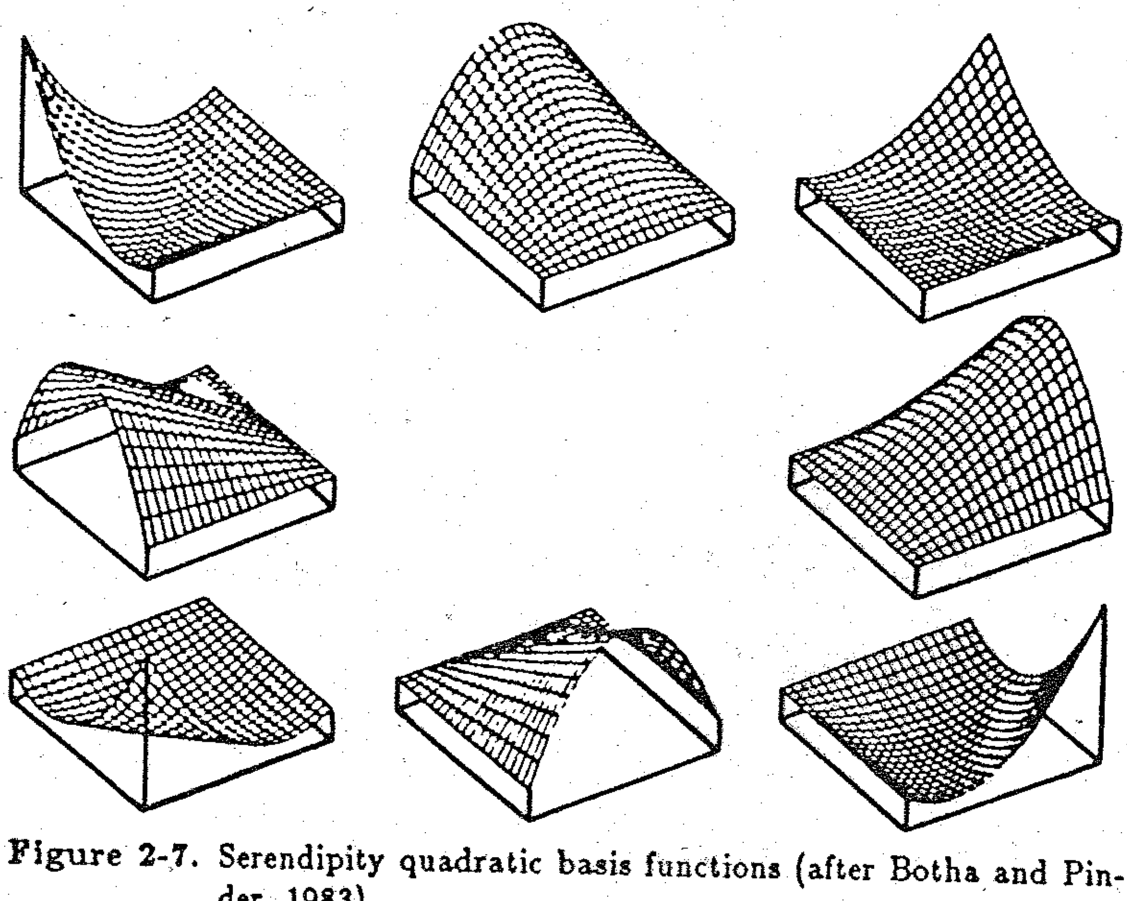
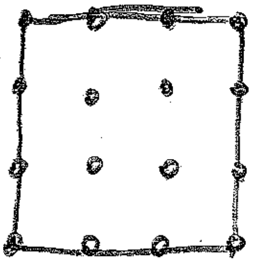


Figure 2-7. Serendipity quadratic basis functions (after Botha and Pinder, 1983).

Elementi "<u>bicubici</u>":

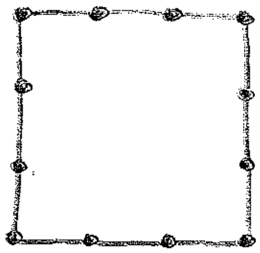
$$g_{ij}(x,y) = l_i(x)\, l_j(y) = \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right)\left(b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3\right)$$

I coefficienti si ottengono risolvendo separatamente 2 problemi monodimensionali in x ed y. La rappresentazione globale è un polinomio <u>bicubico</u>, cioè cubico separatamente in x ed y, con 16 coefficienti



16 nodi
elemento bicubico

Elementi Serendipity



12 nodi:
mancano quelli centrali

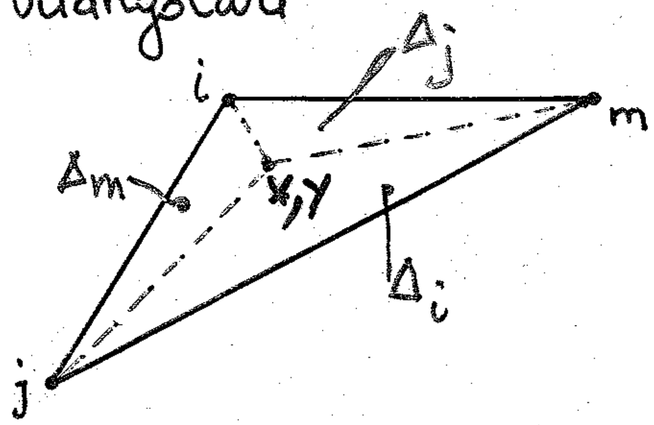
mancano i termini in x^3y^3, x^2y^2, x^2y^3 e x^3y^2

Andamento grafico dei polinomi biquadratici e Serendipity

I termini del "Serendipity" sono:

$1;\ x;\ y;\ xy;\ x^2;\ y^2;\ xy^2;\ x^2y;\ xy^3;\ x^3y;\ x^3;\ y^3$

Elementi triangolari



$$f(x,y) \simeq P_1(x,y) = a + bx + cy$$

$$\Rightarrow \quad P_1(x,y) = \xi_i(x,y)\, f(x_i,y_i) + \xi_j(x,y)\, f(x_j,y_j) + \xi_m(x,y)\, f(x_m,y_m)$$

$$\Downarrow$$

$$\xi_i(x,y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta}$$

$$\begin{cases} a_i = x_j y_m - x_m y_j \\ b_i = y_j - y_m \\ c_i = x_m - x_j \end{cases} \qquad \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \quad \text{area triangolo}$$

Notare che $a_i + b_i x + c_i y = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$

Posto $\Delta_i = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$ = area triangolo interno opposto al nodo i

si ha : $\xi_i(x,y) = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$

$\xi_i(x,y) = \dfrac{\Delta_i(x,y)}{\Delta}$ è detta " area basis function "

Si riconosce subito che :

$$\xi_i(x,y) + \xi_j(x,y) + \xi_m(x,y) = 1$$

quindi, ad es., $\xi_m = \xi_m(\xi_i, \xi_j)$

Si prova facilmente che :

$$\int_\Delta \xi_i^{m_1} \xi_j^{m_2} \xi_m^{m_3} \, dx\, dy = 2\Delta \frac{m_1!\, m_2!\, m_3!}{(m_1+m_2+m_3+2)!}$$

L'errore di interpolazione è :

$$E(x,y) = f(x,y) - P_1(x,y)$$

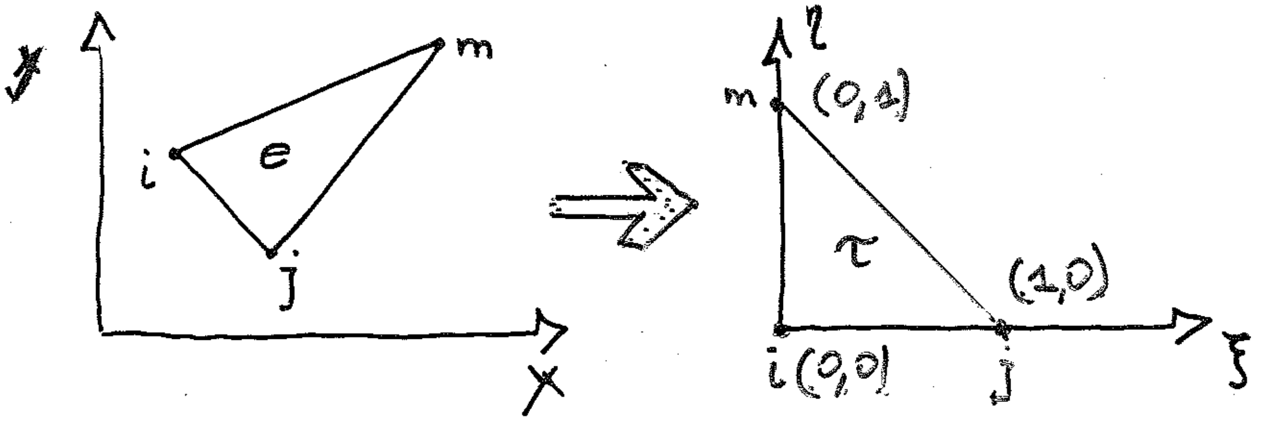
Posto $h = \max\left\{ \sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2},\ \sqrt{(x_i-x_m)^2+(y_i-y_m)^2},\ \sqrt{(x_j-x_m)^2+(y_j-y_m)^2} \right\}$

si prova che $\|E\|_\infty \leq 4Mh^2$ per $h \to 0$

con $M = \max_{(x,y)\in\Delta} \left\{ \left\|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\|_\infty, \left\|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right\|_\infty, \left\|\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right\|_\infty \right\}$

L'interpolazione triangolare converge come il quadrato del lato massimo del triangolo

Trasformazione di coordinate (da globale a locale)



La trasformazione è:

$$x = x_i + (x_j - x_i)\xi + (x_m - x_i)\eta = (1-\xi-\eta)\,x_i + \xi x_j + \eta x_m$$

$$y = y_i + (y_j - y_i)\xi + (y_m - y_i)\eta = (1-\xi-\eta)\,y_i + \xi y_j + \eta y_m$$

La trasformazione inversa è:

$$\xi = \frac{1}{2\Delta}\left(a_j + b_j x + c_j y\right) = \xi_j(x,y)$$

$$\eta = \frac{1}{2\Delta}\left(a_m + b_m x + c_m y\right) = \xi_m(x,y)$$

Jacobiano:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{è noto}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Elemento d'area:

$$dx\,dy = |J|\,d\xi\,d\eta \Rightarrow |J| = \begin{vmatrix} x_j - x_i & y_j - y_i \\ x_m - x_i & y_m - y_i \end{vmatrix} = 2\Delta$$

Per l'integrazione si ha:

$$\iint_e f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\tau f[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)]\,2\Delta\,d\xi\,d\eta =$$

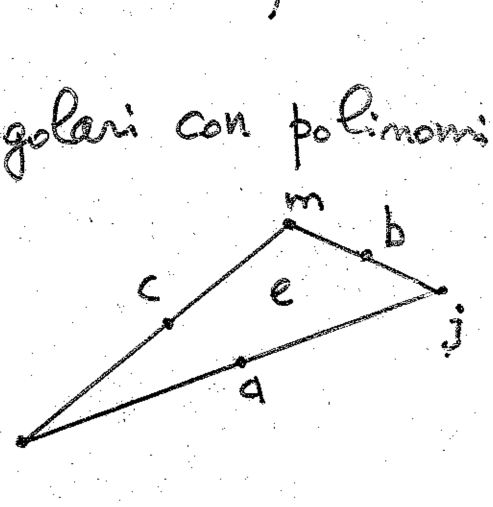
$$= 2\Delta \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} f[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)]\,d\eta$$

Nel riferimento locale si ha:

$$f[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)] \simeq P_1(\xi,\eta) = (1-\xi-\eta) f_i + \xi f_j + \eta f_m$$

cioè i polinomi base per interpolare la f sono uguali ai polinomi che trasformano il triangolo e nel triangolo τ (elementi isoparametrici).

Elementi triangolari con polinomi di 2° grado (6 costanti)



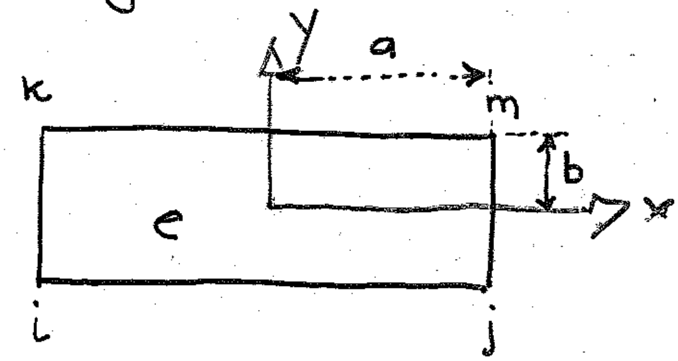
$$f^e \simeq P_i^{(2)}(x,y) f_i + P_j^{(2)}(x,y) f_j + P_m^{(2)}(x,y) f_m + P_a^{(2)}(x,y) f_a + P_b^{(2)}(x,y) f_b + P_c^{(2)}(x,y) f_c$$

Si ha:

$P_i^{(2)}(x,y) = \xi_i(x,y)\left[2\xi_i(x,y) - 1\right]$ e analogamente per $P_j^{(2)}$ e $P_m^{(2)}$

$P_a^{(2)}(x,y) = 4\,\xi_i(x,y)\,\xi_j(x,y)$ e analogamente per $P_b^{(2)}$ e $P_c^{(2)}$ 10-11

Elementi rettangolari



Per la continuità forma bilineare: $f^e \simeq a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy$

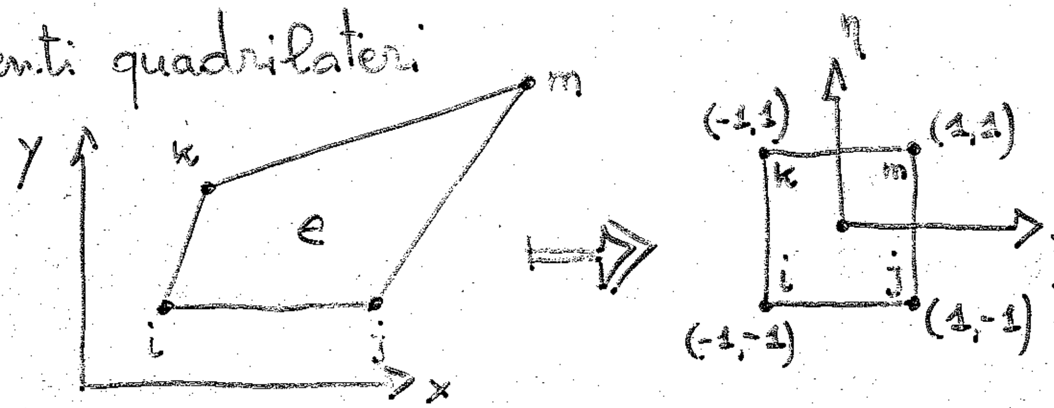
Usando i polinomi di base si ottiene:

$$f^e \simeq \frac{1}{4ab}\left\{(a-x)(b-y)f_i + (a+x)(b-y)f_j + (a+x)(b+y)f_m + (a-x)(b+y)f_k\right\}$$

In coordinate locali $\xi = \frac{x}{a}$ e $\eta = \frac{y}{b}$:

$$f^e = \frac{1}{4}\left\{(1-\xi)(1-\eta)f_i + (1+\xi)(1-\eta)f_j + (1+\xi)(1+\eta)f_m + (1-\xi)(1+\eta)f_k\right\}$$

Elementi quadrilateri



Trasformazione bilineare:

$$x = \frac{1}{4}\left[(1-\xi)(1-\eta)x_i + (1+\xi)(1-\eta)x_j + (1+\xi)(1+\eta)x_m + (1-\xi)(1+\eta)x_k\right]$$

$$y = \frac{1}{4}\left[\quad " \quad y_i + \quad " \quad y_j + \quad " \quad y_m + \quad " \quad y_k\right]$$

$$f^e = \frac{1}{4}\left[\quad " \quad f_i + \quad " \quad f_j + \quad " \quad f_m + \quad " \quad f_k\right]$$

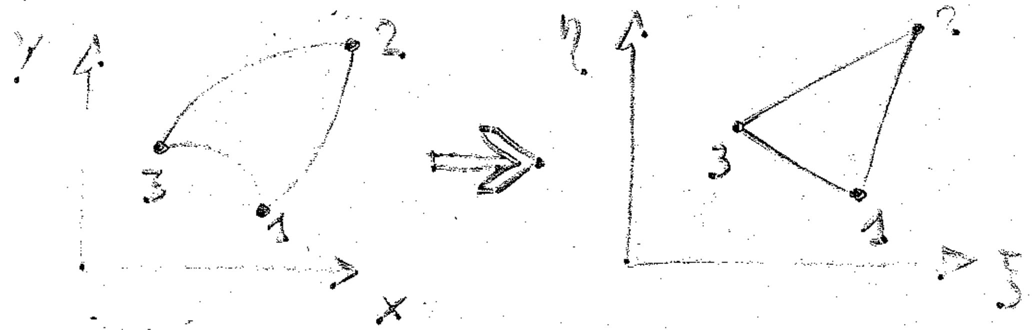
Jacobiano trasformazione:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta), & (1-\eta), & (1+\eta), & -(1+\eta) \\ -(1-\xi), & -(1+\xi), & (1+\xi), & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i, & y_i \\ x_j, & y_j \\ x_m, & y_m \\ x_k, & y_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \end{pmatrix}$$

Semplificazione dell'elemento ⇒ complessità dell'integrando (a causa di J^{-1}).

Il quadrilatero è elemento isoparametrico: i polinomi base per la trasformazione di coordinate sono gli stessi usati per interpolare la f sull'elemento.



Tecnica isoparametrica: trasforma elementi a lati curvi nel piano x-y in elementi a lati dritti nel piano ξ-η.

Più in generale le condizioni che definiscono l'elemento isoparametrico sono:

$$f \simeq \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\xi,\eta) f_i$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\xi,\eta) x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\xi,\eta) y_i$$