Interpolazione di Lagrange

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Polinomio $P_n(x)$ di grado n:

$$P_n(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

$f(x)$ funzione di classe C^m: continua e derivabile m volte in $a \div b$

Definiti i polinomi <u>base</u> di Lagrange:

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

il polinomio interpolatore è:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \ell_i(x)\, f(x_i)$$

Il resto vale:

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \pi_n(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\pi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

Se l'incremento $x_{i+1}-x_i=h$ è uniforme si ha:

$$\begin{cases} x = x_0 + ph & 0 \le p \le n \\ x_i = x_0 + ih \end{cases}$$

$$\pi_n(x) = ph(p-1)h\cdots(p-n)h = p(p-1)\cdots(p-n)\,h^{n+1}$$

Se $f^{(n+1)}(\xi)$ resta limitata in $a \mapsto b$ al crescere di

$|p(p-1)\cdots(p-n)|\,|f^{(n+1)}(\xi)| < C$ risulta:

$$|E_n| < C\,h^{n+1}$$

cioè l'errore E_n è dell'ordine $O(h^{n+1})$.

Sistema locale di coordinate ξ:

$$\xi_0 = -1 \qquad \xi_n = 1$$

$$\boxed{x = x_0 + \frac{x_n - x_0}{2}(1+\xi)} \quad \begin{matrix} x_0 \le x \le x_n \\ -1 \le \xi \le 1 \end{matrix} \qquad \begin{cases} x - x_0 = ph \\ x_n - x_0 = nh \end{cases}$$

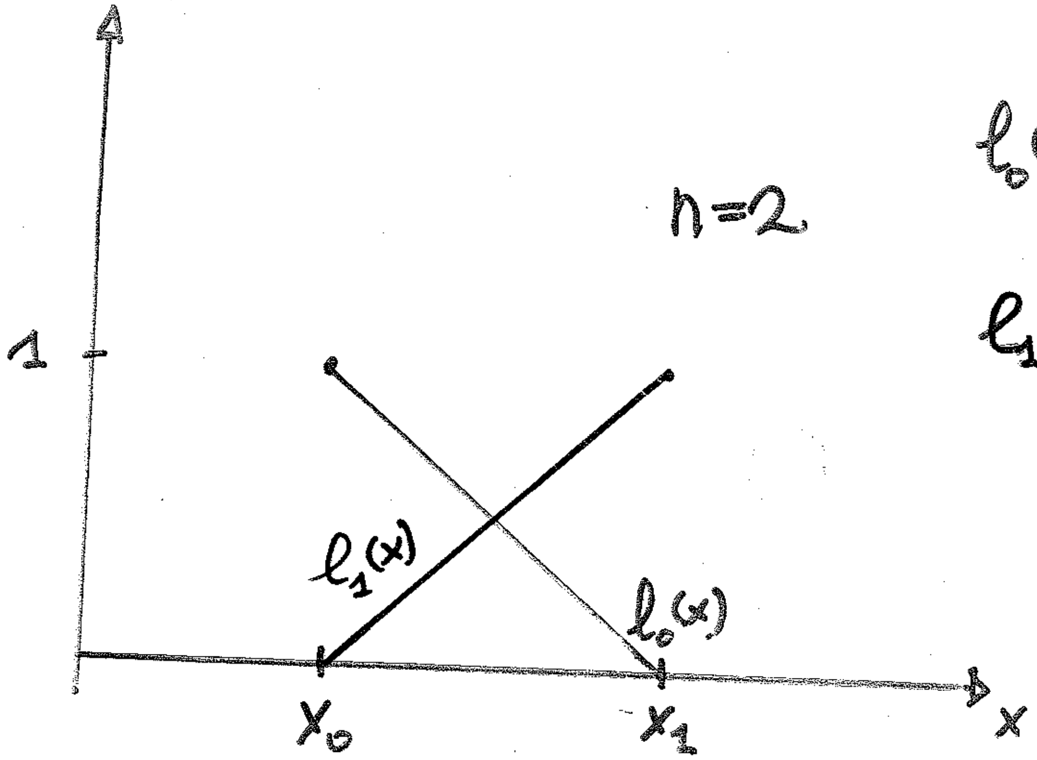
$$p\cancel{h} = \frac{n\cancel{h}}{2}(1+\xi) \rightarrow \boxed{\xi = \frac{2p}{n} - 1}$$

Esempio $n = 1$:

$$\ell_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \Longrightarrow \hat{\ell}_1(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

In generale:

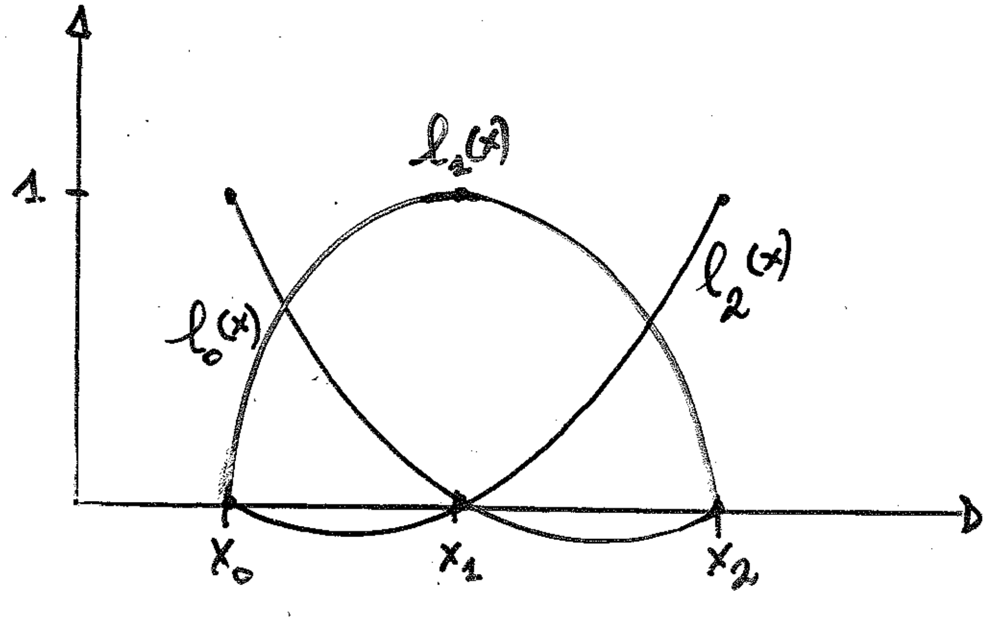
$$\hat{\ell}_i(\xi) = \prod_{j=0}^{n} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \qquad -1 \le \xi \le 1$$



$n=2$

$$\ell_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$$

$$\ell_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$



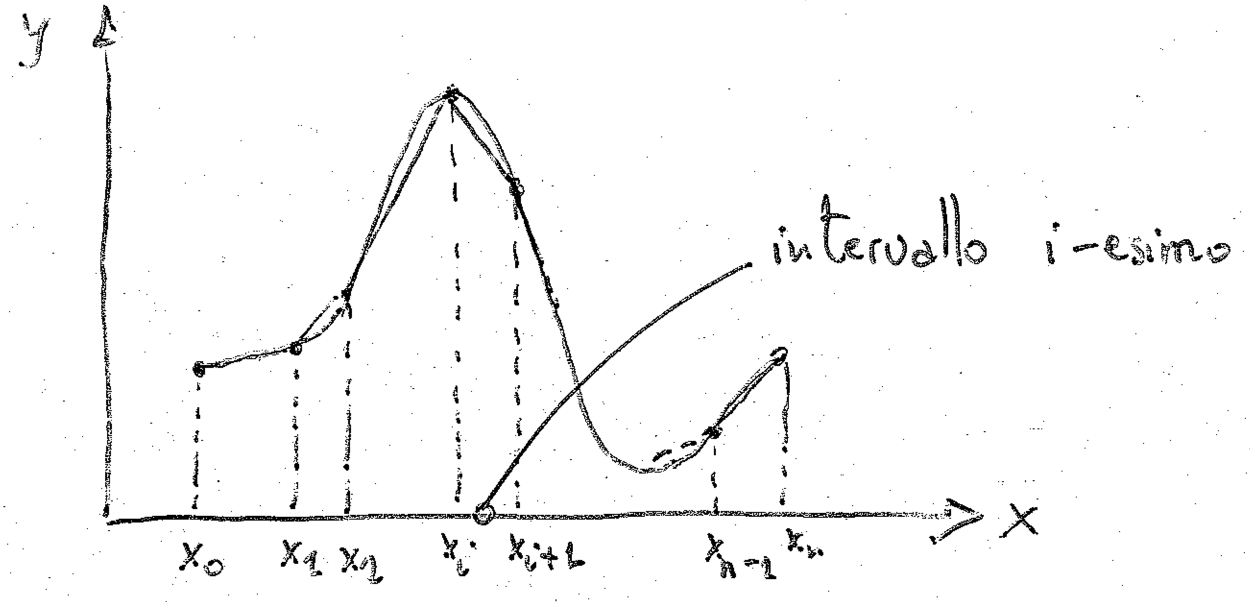
$$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$n=3$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Polinomio lineare continuo a tratti



$$\begin{cases} p_1^{(i)}(x) = \alpha_i(x)\,y_i + \beta_{i+1}(x)\,y_{i+1} & x_i \le x \le x_{i+1} \\ p_1^{(i-1)}(x) = \alpha_{i-1}(x)\,y_{i-1} + \beta_i(x)\,y_i & x_{i-1} \le x \le x_i \\ \alpha_i(x) = \dfrac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} \qquad \beta_{i+1}(x) = \dfrac{x - x_i}{x_{i+1}-x_i} & i = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

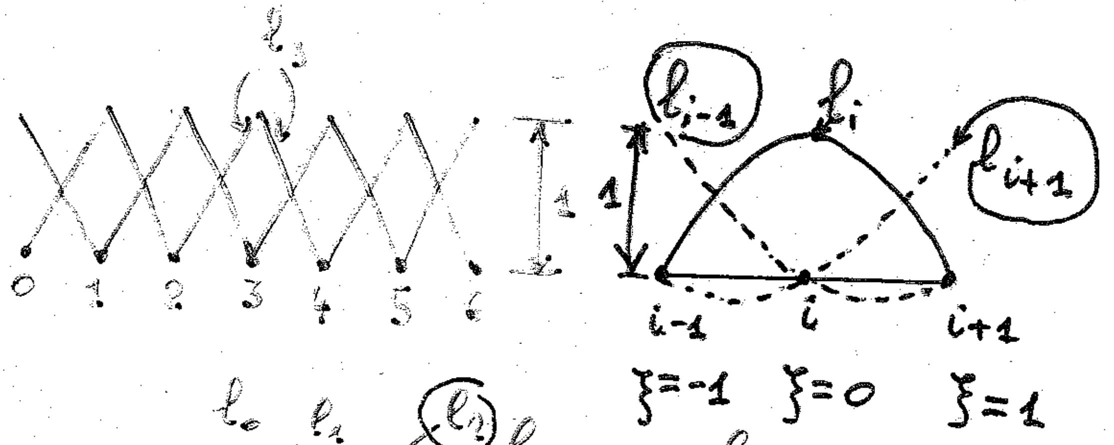
Su $x_0 \longmapsto x_n$ il polinomio continuo a tratti è:

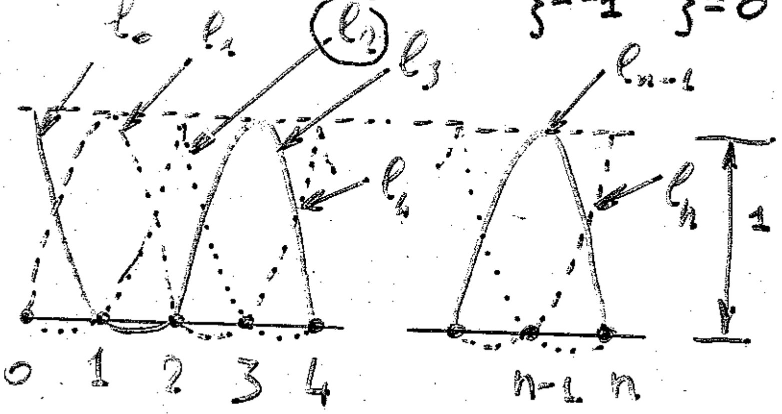
$$P_1(x) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i(x)\, y_i$$

$$\xi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & x_0 \le x \le x_1 \\ 0 & x \ge x_1 \end{cases}$$

$$\xi_i(x) = \begin{cases} 0 & x_0 \le x \le x_{i-1} \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x_{i-1} \le x \le x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 & x_{i+1} \le x \le x_n \end{cases}
\qquad
\xi_n(x) = \begin{cases} 0 & x_0 \le x \le x_{n-1} \\ \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

Interpolazione a supporto locale





			ξ_i
Lineare		$\frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)$	± 1
Quadratica	nodi finali:	$\frac{1}{2}\xi\xi_i(1+\xi\xi_i)$	± 1
	nodo interno	$1-\xi^2$	

			ξ_i
Cubica	nodi finali:	$(9\xi^2-1)(1+\xi\xi_i)/16$	± 1
	nodi interni	$9(1-\xi^2)(1+3\xi\xi_i)/16$	± 1

Questi polinomi sono anche detti "piecewise".

Assicurano la continuità della rappresentazione ma non della derivata prima

Cubiche di Hermite: garantiscono la uguaglianza della funzione e della derivata prima nell'intervallo $i \vdash\!\dashv i+1$:

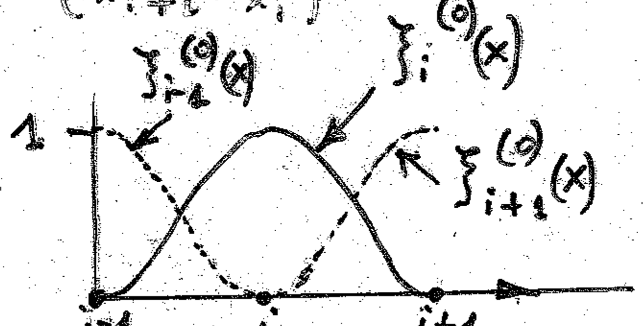
$$P_i^{(3)}(x) = \alpha_i(x) f_i + \beta_{i+1}(x) f_{i+1} + \gamma_i(x) f_i' + \delta_{i+1}(x) f_{i+1}'$$

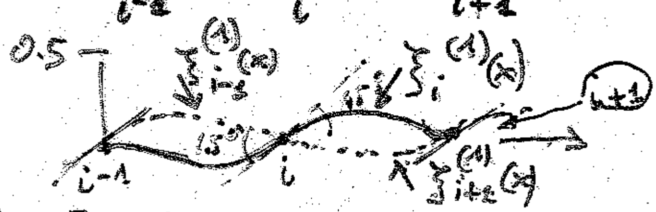
$$\alpha_i(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^2\left[(x_{i+1}-x_i)+2(x-x_i)\right]}{(x_{i+1}-x_i)^3}$$

$$\beta_{i+1}(x) = \frac{(x-x_i)^2\left[(x_{i+1}-x_i)+2(x_{i+1}-x)\right]}{(x_{i+1}-x_i)^3}$$

$$\gamma_i(x) = \frac{(x-x_i)(x_{i+1}-x)^2}{(x_{i+1}-x_i)^2}$$

$$\delta_{i+1}(x) = \frac{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)^2}$$





$$P^{(3)}(x) = \sum_i^n \left[\xi_i^{(0)}(x) f_i + \xi_i^{(1)}(x) f_i'\right]$$

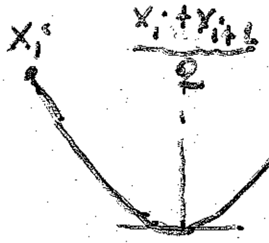
Resto di Lagrange :

$$R_L(x) = \frac{F(x)\, f^{(n)}[\xi(x)]}{n!} = (x-x_i)(x-x_{i+1})\,\frac{f^{(2)}(\xi)}{2}$$

Resto di Hermite :

$$R_H = \frac{f^{(2n)}[\xi(x)]}{(2n)!}\, F(x)^2 = (x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2\,\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}$$

Si ha :



$F(x) = (x-x_i)(x-x_{i+1})$

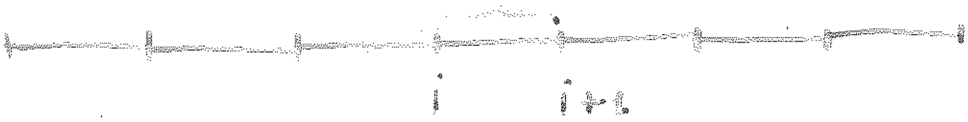
$F_{max} = -\frac{h^2}{4}$

Al tendere del passo $h \to 0$ l'errore max di interpolazione va a zero come:

- h^2 interpolazione lineare continua a tratti
- h^4 " cubica " "

Funzioni "spline": garantiscono una certa regolarità della rappresentazione senza "onorare" i valori delle derivate.

Esempio: spline di 2° grado.



$$S_i^{(2)}(x) = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + c_i (x - x_i)(x - x_{i+1})$$

$$(i = 0, \ldots, n-1)$$

Assumiamo h = cost. La continuità delle derivate prime nel nodo i:

$$\frac{d S_{i-1}^{(2)}(x_i)}{dx} = \frac{d S_i^{(2)}(x_i)}{dx}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f_i - f_{i-1}}{h} + c_{i-1}\left(2x_i - x_i - x_{i-1}\right) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + c_i\left(2x_i - x_{i+1} - x_i\right)$$

$$\Downarrow$$

$$c_i + c_{i-1} = \frac{1}{h^2}\left(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}\right) \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

$n-1$ equazioni con n incognite c_i $(i = 1, \ldots, n$

Spline cubica : $\underset{i \qquad i+1}{\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv}$ Derivata 2ª lineare:

$$S_3^{(i)''}(x) = c_i \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} + c_{i+1} \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \qquad (i=0,\dots,n-1)$$

La continuità della derivata 2ª è garantita. Chiediamo che $S_3^{(i)}(x)$ "onori" i dati della funzione:

$$\begin{cases} S_3^{(i)}(x_i) = f_i \\ S_3^{(i)}(x_{i+1}) = f_{i+1} \end{cases} \qquad i=0,1,\dots,n-1$$

Integriamo due volte la $S_3^{(i)''}(x)$ e imponiamo le precedenti 2 condizioni: le 2 costanti di integrazione dipendono da c_i e c_{i+1}.

Dopo alcuni calcoli si ottiene:

$$S_3^{(i)}(x) = \frac{c_i}{6h}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{c_{i+1}}{6h}(x-x_i)^3 + \left(\frac{f_i}{h} - \frac{h}{6}c_i\right)(x_{i+1}-x) +$$

$$+ \left(\frac{f_{i+1}}{h} - \frac{h}{6}c_{i+1}\right)(x-x_i) \qquad (i=0,1,\dots,n-1)$$

Imponendo infine $S_3^{(i-1)'}(x_i) = S_3^{(i)'}(x_i)$ si ha:

$$c_{i+1} + 4c_i + c_{i-1} = \frac{6}{h^2}\left(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}\right) \qquad (i=1,\dots,n-1)$$