EQUAZIONI IPERBOLICHE

1) $$\frac{\partial c}{\partial t} + v \cdot \nabla c = 0$$ trasporto (convezione) non reattivo

(si assume $\operatorname{div} \vec{v} = 0$)

. PDE del 1° ordine detta anche del "trasporto avvettivo".

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \cdot \nabla c + \lambda c = 0$$ PDE di "avvezione - reazione".

2) $$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

PDE di Navier-Stokes (2-D)
per fluido incompressibile
ρ = densità ; μ = viscosità

Per fluido comprimibile $\left(\frac{D\rho}{Dt} \neq 0\right)$ non viscoso $(\mu = 0)$
si ha:

3) $$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$ conservazione della massa

$$\left.\begin{aligned}\frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{Dv}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned}\right\}$$ conservazione della quantità di moto

$$\rho\frac{DE}{Dt}+p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$ conservazione della energia E per unità di massa

Assumiamo l'equilibrio termodinamico locale:

eq. di stato $\Rightarrow p = p(\rho, S)$ $\quad S =$ entropia

Flussi non viscosi compressibili con eq. di stato sono "isentropici", cioè $p = p(\rho)$, lungo le traiettorie

Posto $a^2 = \partial p/\partial\rho$ si ha:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = a^2\frac{\partial \rho}{\partial x}\\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} = a^2\frac{\partial \rho}{\partial y}\end{aligned}\right\}$$ lungo le traiettorie

Le PDE del moto di un fluido compressibile non viscoso diventano così:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\rho}\dfrac{D\rho}{Dt} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{a^2}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{a^2}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial y} = 0
\end{cases}
$$

$a = \sqrt{\partial p/\partial \rho}$ = "velocità del suono" nel fluido

4) $$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$ PDE di Burger (auto-avvezione)

Si ricava dalla PDE di Navier-Stokes 1-D assumendo p indipendente da x. È una PDE parabolica non lineare. Per μ piccolo (e.g. aria) è di tipo "misto".

Per $\mu \to 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$ simile alla PDE 1-D di trasporto

5) Per flusso 1-D compressibile non viscoso le PDE in alto diventano:

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}=0$$

PDE non lineari in ρ ed u

Assunzioni: 1) fluttuazioni piccole di ρ attorno al valor medio $\rho_0 \Rightarrow u\, \partial\rho/\partial x \simeq 0$

2) u piccola $\Rightarrow u\, \partial u/\partial x \simeq 0$

Le 2 PDE diventano:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+a^2\frac{\partial\rho}{\partial x}=0$$

Deriviamo la 1ª rispetto a t e la 2ª rispetto ad x (trascurando i prodotti: $\partial\rho/\partial t\cdot\partial u/\partial x$ e $\partial\rho/\partial x\cdot\partial u/\partial t$). Sottraiamo membro a membro:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}=0$$

Derivando la 1ª rispetto ad x e la 2ª rispetto a t e sottraendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

Questi sono esempi della famosissima <u>PDE delle onde</u>.

Posto $at = y$, la precedente si trasforma nella forma canonica:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{prototipo PDE iperbolica}$$

Problemi "ben posti" sono: $\begin{cases} \text{initial value problems} \\ \text{initial boundary value problems} \end{cases}$

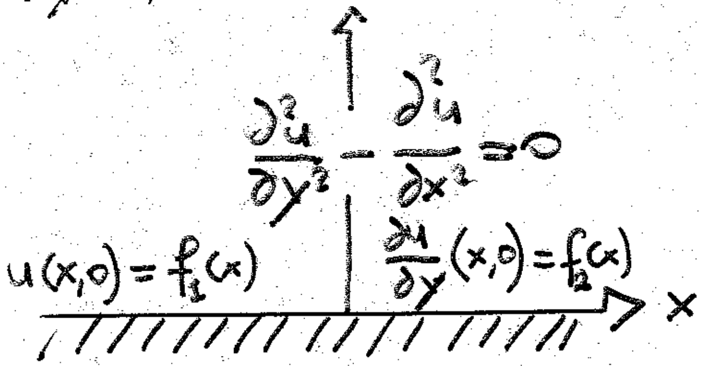
Problema di Cauchy ai valori iniziali:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u(x,0) = f_1(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

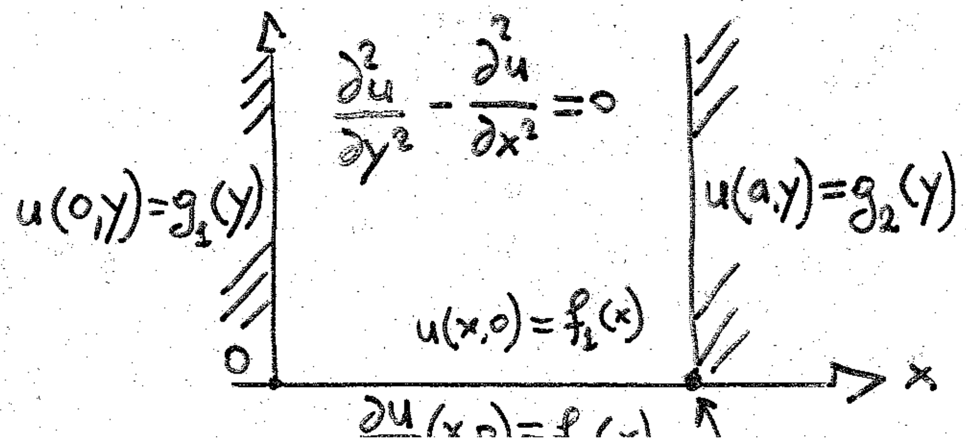
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = f_2(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

a)



problema di Cauchy

b)



"initial boundary value problem"

Formula di D'Alembert per il problema di Cauchy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Cambiamento di variabili:

$$\xi = x + y \qquad \psi = x - y$$

la PDE delle onde diventa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \psi} = 0$$

L'eq. che fornisce le "linee caratteristiche"

$$\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{a} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b\left(\frac{dy}{dx}\right) + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{c} = 0$$

diventa per la PDE precedente:

$$\frac{d\xi}{d\psi} = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{d\psi}{d\xi} = 0$$

Le "linee caratteristiche" sono le famiglie di rette

$$\xi = \text{cost} \qquad \psi = \text{cost}$$

parallele agli assi $\xi = 0$ e $\psi = 0$

Si noti come la PDE sia interpretabile come ODE lungo le

Integrando rispetto a ψ:

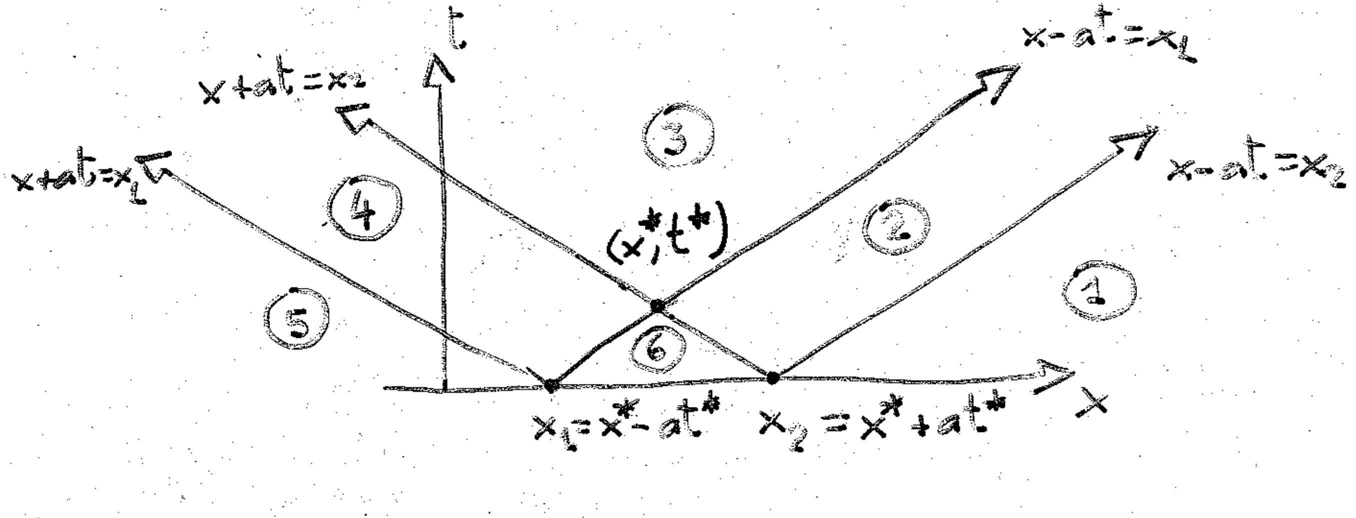
$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = F_1(\xi) \quad \Rightarrow \quad u = \underbrace{\int_0^{\xi} F_1(z)\,dz}_{G_1(\xi)} + G_2(\psi)$$

$$u = G_1(\xi) + G_2(\psi) =$$

$$= G_1(x+y) + G_2(x-y)$$

$$= \boxed{G_1(x+at) + G_2(x-at)}$$

$G_1, G_2 \Rightarrow$ arbitrarie



$G_2(x-at)$ = onda progressiva

$G_1(x+at)$ = onda regressiva

Derivando la soluzione generale:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial G_1}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial G_2}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial G_1(\xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial G_2(\psi)}{\partial \psi}$$

Imponiamo le condizioni iniziali

$$u(x,0) = G_1(x) + G_2(x) = f_1(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = G_1'(x) - G_2'(x) = f_2(x)$$

Derivando la 1^a eq.:

$$G_1'(x) + G_2'(x) = f_1'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$G_1'(x) = \frac{1}{2}\left[f_1'(x) + f_2(x)\right] \qquad G_2'(x) = \frac{1}{2}\left[f_1'(x) - f_2(x)\right]$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$G_1(x) = \frac{1}{2}\left[f_1(x) + \int_0^x f_2(z)\,dz\right] \qquad G_2(x) = \frac{1}{2}\left[f_1(x) - \int_0^x f_2(z)\,dz\right]$$

La soluzione generale è dunque:

$$u(x,y) = G_1(x+y) + G_2(x-y) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[f_1(x+y) + \int_0^{x+y} f_2(z)\,dz\right] + \frac{1}{2}\left[f_1(x-y) - \int_0^{x-y} f_2(z)\,dz\right]$$

ovvero:

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left[f_1(x+y) + f_1(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} f_2(z)\,dz\right]$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left[f_1(x+at) + f_1(x-at) + \int_{x-at}^{x+at} f_2(z)\,dz\right]$$

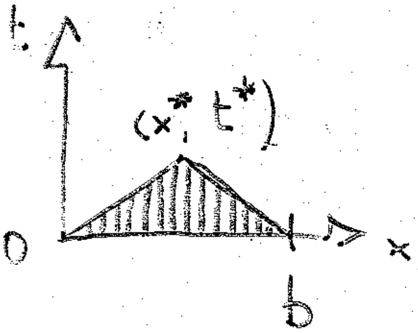
che è la formula di D'Alembert.

$x - at = x_1$; $x + at = x_2$ (corrisp. a $\xi = x_2$ e $\psi = x_1$) $\Rightarrow$ linee caratteristiche

$x_1 \quad x_2$ intervallo di dipendenza

(6) regione di dipendenza

(2) ∪ (3) ∪ (4) ∪ (6) regione di influenza



$x^* = b/2$

$t^* = b/2a$

Sistemi iperbolici

Sistema quasi-lineare di 2 PDE del 1° ordine in $v(x,y)$ e $w(x,y)$:

$$p_{11}\frac{\partial v}{\partial x} + p_{12}\frac{\partial w}{\partial x} + q_{11}\frac{\partial v}{\partial y} + q_{12}\frac{\partial w}{\partial y} + r_1 = 0$$

$$p_{21}\frac{\partial v}{\partial x} + p_{22}\frac{\partial w}{\partial x} + q_{21}\frac{\partial v}{\partial y} + q_{22}\frac{\partial w}{\partial y} + r_2 = 0$$

dove p_{ij}, q_{ij} ed r_i dipendono da x, y, v e w.

Sistema di 2 PDE lineare: se p_{ij}, q_{ij} e r_i dipendono solo da x ed y.

Se w è assente:

$$p_{11}\frac{\partial v}{\partial x} + q_{11}\frac{\partial v}{\partial y} + r_1 = 0 \qquad \text{eq. di trasporto 1-D}$$

Supponiamo di conoscere $v(x,y)$ e $w(x,y)$ su γ che ha equazioni parametriche $x = x(\sigma)$ e $y = y(\sigma)$. Allora su

$$\frac{dv}{d\sigma} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{d\sigma} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{d\sigma}$$

$$\frac{dw}{d\sigma} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{d\sigma} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{d\sigma}$$

La conoscenza di v, w, $dv/d\sigma$ e $dw/d\sigma$ su γ è sufficiente a determinare (su γ) $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$, $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$?

Combiniamo le 4 equazioni precedenti:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & q_{11} & q_{12} \\ p_{21} & p_{22} & q_{21} & q_{22} \\ dx/d\sigma & \emptyset & dy/d\sigma & \emptyset \\ \emptyset & dx/d\sigma & \emptyset & dy/d\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial v/\partial x \\ \partial w/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ \partial w/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ dv/d\sigma \\ dw/d\sigma \end{bmatrix}$$

La soluzione esiste ed è unica se il det è $\neq 0$, cioè:

$$(p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12})\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 - (p_{11}q_{22} - p_{21}q_{12} + q_{11}p_{22} - q_{21}p_{12})\frac{dy}{d\sigma}\frac{dx}{d\sigma} +$$

$$+(q_{11}q_{22} - q_{21}q_{12})\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 \neq 0$$

Le "direzioni caratteristiche $\frac{dy}{dx}$" sono le radici della eq:

$$(p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12})\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (p_{11}q_{22} - p_{21}q_{12} + q_{11}p_{22} - q_{21}p_{12})\frac{dy}{dx} +$$
$$(q_{11}q_{22} - q_{21}q_{12}) = 0$$

In particolare occorre esaminare il segno del discriminante:

$$Discr = (p_{11}q_{22} - p_{21}q_{12} + q_{11}p_{22} - q_{21}p_{12})^2 - 4(p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12})(q_{11}q_{22} - q_{21}q_{12})$$

Discr > 0 : sistema iperbolico

Discr $= 0$: " parabolico

Discr $<$: " ellittico

Definendo le matrici:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

si scrive sinteticamente:

$$PU_x + QU_y + R = 0$$

Se $\det Q \neq 0$, posto $A = Q^{-1}P$ e $C = Q^{-1}R$

$$U_y + A U_x + C = 0$$

Il sistema delle 2 PDE del 1° ordine è "iperbolico" se:

$$\lambda_1(A) \text{ e } \lambda_2(A) = \text{reali distinti}$$

cioè il $Disc > 0$ come già prima detto (vedi pag. 30 bis)

Posto $T = H^{-1}$ con H = matrice avente per colonne gli autovettori di A (reali)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$A H = H \Lambda \Rightarrow T A \underbrace{H T}_{I} = \underbrace{T H}_{I} \Lambda T \Rightarrow T A = \Lambda T$$

Moltiplicando ambo i membri per T del sistema verde:

$$T U_y + T A U_x + D = 0 \qquad (D = TC)$$

cioè:

$$\boxed{T U_y + \Lambda T U_x + D = 0} \quad \text{"forma normale"}$$

che sempre esiste per un sistema iperbolico

L'eq. delle "direzioni caratteristiche" (pag. 30) può scriversi:

$$(q_{11} q_{22} - q_{12} q_{21}) \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - (p_{11} q_{22} - p_{21} q_{12} + q_{11} p_{22} - q_{21} p_{12}) \frac{dx}{dy} + p_{11} p_{22} - p_{21} p_{12} = 0$$

che è uguale alla eq. caratteristica di A.

Pertanto :

$$\frac{dx}{dy} = \lambda_1 \quad e \quad \frac{dx}{dy} = \lambda_2 \quad \text{e se } \lambda_1 \neq 0 \text{ e } \lambda_2 \neq 0 \text{ allora}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lambda_1}} \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lambda_2}}$$ direzioni delle linee caratteristiche

PDE delle onde : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Posto $v = \partial u/\partial x \qquad w = \partial u/\partial y$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$ (differenza derivata 2ª mista)

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$ (eq. delle onde)

che è sistema lineare canonico con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $R = C = \phi$

Gli autovalori di A sono :

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

e le "caratteristiche"

$x - y = c_1 \qquad x + y = c_2$ già incontrate

nsideriamo la PDE 1-D per flusso compressibile non
scoso prima di semplificarlo nella PDE delle onde (es. 5):

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + a^2\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$v = u \; ; \; w = \rho \; ; \; y = t \implies$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{a^2}{w}\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Sistema di 2 PDE quasi lineari del 1° ordine in forma canonica con:

$$A = \begin{bmatrix} v & a^2/w \\ w & v \end{bmatrix} \implies (v-\lambda)^2 - a^2 = 0$$

a = velocità del suono nel fluido > 0. Così:

$$\lambda_1 = v + a \qquad \lambda_2 = v - a$$

Le "linee caratteristiche" si ottengono dalle equazioni:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v+a} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{v-a}$$

Se $v \ll a$ $\quad x - ay = c_1 \qquad x + ay = c_2$ sono rette (eq. delle onde classica)

PDE di trasporto "avvezione-reazione"

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda u \qquad (1\text{-D})$$

Nel piano $(x-t)$ cerchiamo le curve $\gamma \begin{cases} x = x(s) \\ t = t(s) \end{cases}$

lungo le quali la PDE si trasforma in una ODE:

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds}$$

Se γ è tale che: $\begin{cases} dt/ds = 1 \\ dx/ds = v \end{cases}$ si ha:

eq. caratteristica $\Rightarrow \dfrac{du}{ds} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + v\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\lambda u$ ODE lungo γ $\Downarrow$ caratteristica

$$\Downarrow$$

$$u(s) = u_0 \exp\left\{-\int_0^s \lambda[x(s), t(s)]\,ds\right\}$$

Problema ai valori iniziali $(-\infty < x < \infty)$ con condizioni iniziali dati sotto forma parametrica nello spazio x, t, u:

$$t = 0 \quad x = \ell \qquad u = u_0(\ell)$$

"Curve caratteristiche" ed "ODE caratteristica":

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad ; \quad \frac{dx}{ds} = v \quad ; \quad \frac{du}{ds} = -\lambda u$$

Integrando con le condizioni iniziali prima dette:

$$t = s \qquad x = vs + \ell \qquad u = u_0(\ell)\, e^{-\lambda s}$$

Lungo le "linee caratteristiche"

$$x = vs + \ell = vt + \ell$$

la $u(x,t)$ decade esponenzialmente.

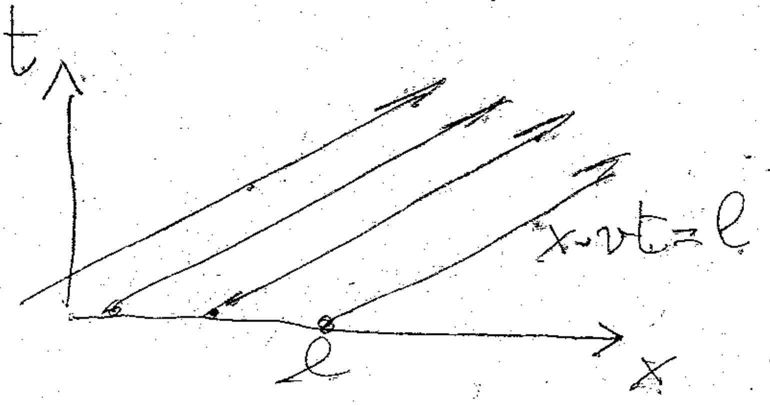
Eliminando s:

$$u(x,t) = u_0(x - vt)\, e^{-\lambda t}$$ superficie nel piano $(x-t)$

La soluzione ci dice che la concentrazione u subisce due modifiche al progredire del tempo:

a) trasporto a valle con velocità v. Infatti se $\lambda = 0$:

$$u(x,t) = u_0(x - vt)$$



b) la u iniziale subisce un decadimento esponenziale:

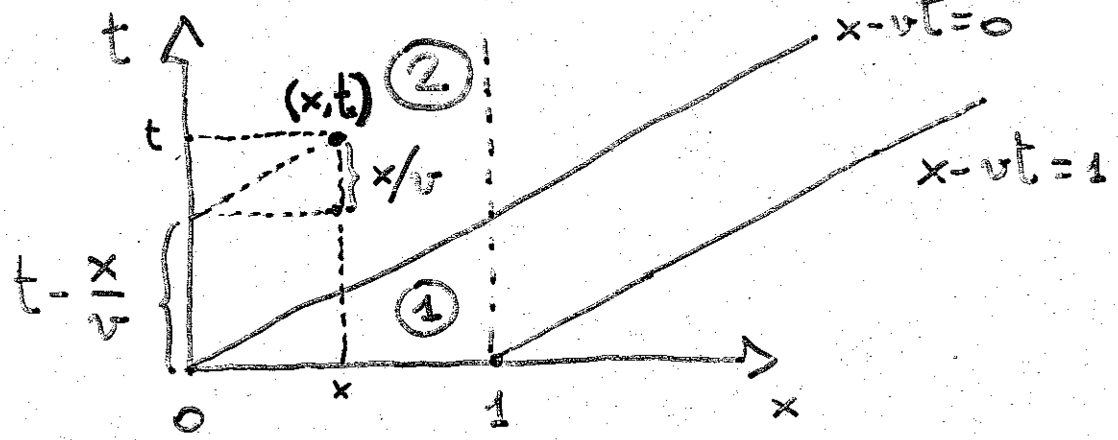
Infatti se $v = 0$ la PDE sarebbe una ODE con soluzione:

$$u = u_0(x)\, e^{-\lambda t}$$

Esempio di "i.b.v." problem "ben posto":

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad 0 < x < 1$$
$$u(0,t) = u_B(t) \qquad t > 0$$

Per $\lambda = 0$ la soluzione è (si dimostra):



in 1 $\qquad 0 \leq x - vt \leq 1 \qquad u(x,t) = u_0(x - vt)$

in 2 $\qquad x - vt < 0 \qquad u(x,t) = u_B\left(t - \frac{x}{v}\right)$

Per la PDE di trasporto non si può imporre la soluzione a valle $u_R(t)$ a meno che non sia:

$$u_R(t) = u_0(1 - vt) \qquad 0 \leq t \leq 1/v$$
$$u_R(t) = u_B(t - 1/v) \qquad t > 1/v$$

Perturbando la PDE di trasporto la condizione a valle può essere soddisfatta:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u = 0 \qquad \text{PDE di avvezione-diffusione}$$

Brusco cambiamento della soluzione per $\varepsilon \to 0$: perturbazione singolare $\Longrightarrow$

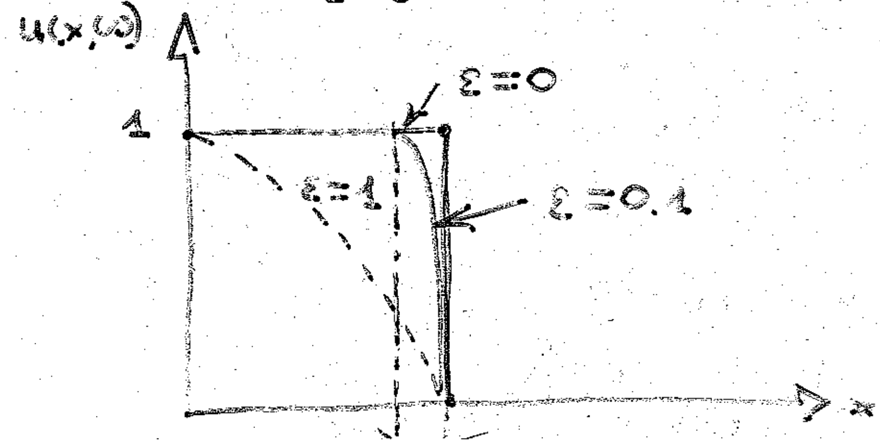
$\boxed{\text{"boundary layers"}}$

Versione stazionaria della precedente con $\lambda = 0$:

$$v\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{condizioni al contorno} \begin{cases} u(0,\infty) = 1 \\ u(1,\infty) = 0 \end{cases}$$

Posto $v = 2$, $\varepsilon = 1/\delta$, la soluzione è:

$$u(x,\infty) = \frac{e^{2\delta x} - e^{2\delta}}{1 - e^{2\delta}} = \exp(\delta x)\frac{\sinh[\delta(1-x)]}{\sinh(\delta)}$$



PDE iperboliche quasi-lineari del 1° ordine

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\,\frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda u \qquad \text{con } v \text{ e } \lambda \text{ funzioni di } x, t \text{ ed } u.$$

(la PDE di Burger ne è un caso particolare con $\varepsilon = 0$).

PDE iperbolica quasi-lineare del 1° ordine:

$$a(x,t,u)\,\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,t,u)\,\frac{\partial u}{\partial t} + c(x,t,u) = 0$$

Consideriamo nel piano $x - t$ la curva $\gamma \equiv \begin{cases} x = x(s) \\ t = t(s) \end{cases}$

Essa è "curva caratteristica" se lungo di essa la PDE si trasforma in una ODE. Se:

$$\frac{dx}{ds} = a \qquad \frac{dt}{ds} = b \qquad \text{su } \gamma \text{ si ha:}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} = \frac{du}{ds} = -c(x,t,u)$$

Ogni soluzione della PDE soddisfa al sistema di ODE:

$$\begin{cases} dx/ds = a(x,t,u) \\ dt/ds = b(x,t,u) \\ du/ds = -c(x,t,u) \end{cases}$$

Sotto regolarità di a, b e c ogni punto x_0, t_0, u_0 è origine di una sola soluzione

Cerchiamo una superficie $u(x,t)$ soddisfacente alla PDE e passante per la curva iniziale γ_0:

$$x = x_0(\ell) \; ; \; t = t_0(\ell) \; ; \; u = u_0(\ell)$$

Fissiamo ℓ, cioè un punto (iniziale) nello spazio (x, t, u).

Siano:

$$x = x(s,\ell) \; ; \; t = t(s,\ell) \; ; \; u = U(s,\ell) \qquad (1)$$

le coordinate della curva soddisfacente le 3 ODE e le condizioni iniziali.

Assumiamo $s=0$ su γ_0. Allora dovrà essere:

$$x(0,\ell) = x_0(\ell) \; ; \; t(0,\ell) = t_0(\ell) \; ; \; U(0,\ell) = u_0(\ell)$$

Assumiamo che $x(s,\ell)$ e $t(s,\ell)$ si possano invertire univocamente in una regione del piano x,t, cioè che esistano le:

$$s = s(x,t) \; ; \; \ell = \ell(x,t)$$

Su questa regione la soluzione sarà:

$$u(x,t) = U[s(x,t), \ell(x,t)]$$

Per l'inversione occorre che sia $\neq 0$ lo Jacobiano della trasformazione:

$$\begin{vmatrix} \partial x/\partial s & \partial x/\partial \ell \\ \partial t/\partial s & \partial t/\partial \ell \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial t}{\partial \ell} - \frac{\partial t}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial \ell} \neq 0$$

Su $\gamma_0 \Rightarrow x = x_0(\ell)$; $t = t_0(\ell)$, cioè $\frac{\partial x}{\partial \ell} = \frac{dx_0}{d\ell}$; $\frac{\partial t}{\partial \ell} = \frac{dt_0}{d\ell}$

Inoltre $\partial x/\partial s = a$ e $\partial t/\partial s = b$ cioè:

$$a\frac{dt_0}{d\ell} - b\frac{dx_0}{d\ell} = \left(\frac{dx_0}{d\ell}, \frac{dt_0}{d\ell}\right)\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \neq 0$$

vale a dire:

<u>la proiezione di γ_0 sul piano x,t non può essere tangente ad una linea caratteristica.</u>

Anche quando la eq. precedente vale, essa vale solo localmente in prossimità della curva iniziale. Esistenza ed unicità delle PDE iperbolica quasi lineari sono proprietà <u>locali</u>.

In generale non possiamo garantire l'esistenza di soluzioni continue in <u>grande</u> e possiamo essere costretti ad ammettere l'esistenza di soluzioni $u(x,t)$ <u>discontinue</u>.

PDE di Burger con $\varepsilon = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Il sistema di ODE valido sulle linee caratteristiche è

$$\begin{cases} dx/ds = u \\ dt/ds = 1 \\ du/ds = 0 \end{cases}$$

Poichè $du/ds = 0$, le caratteristiche sono rette

Problema di Cauchy coi seguenti dati iniziali:

$$x = \ell \quad ; \quad t = 0 \quad ; \quad u = u_0(\ell)$$

La soluzione alle 3 ODE è:

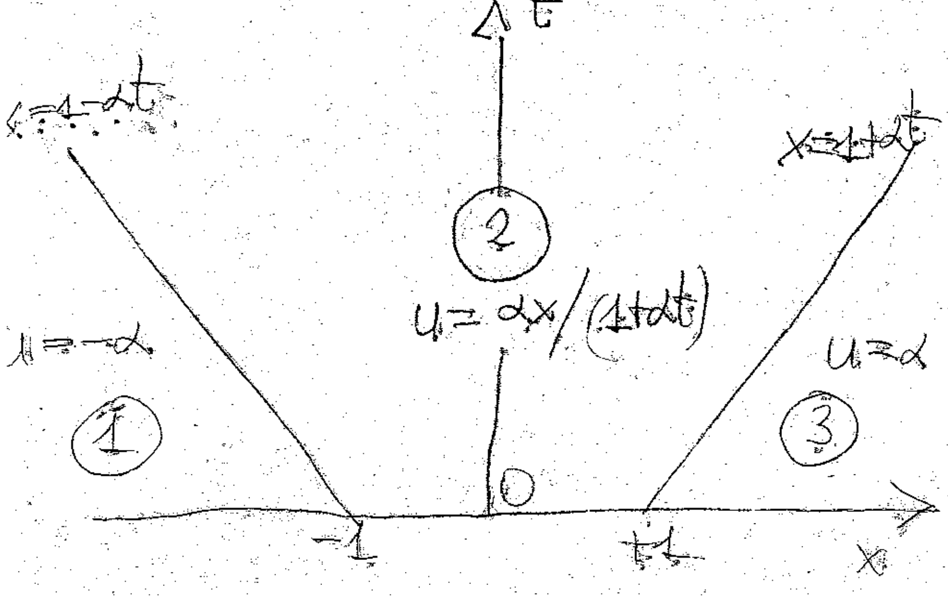
$$x(\ell, s) = \ell + u_0(\ell)\, s \quad ; \quad t(\ell, s) = s$$

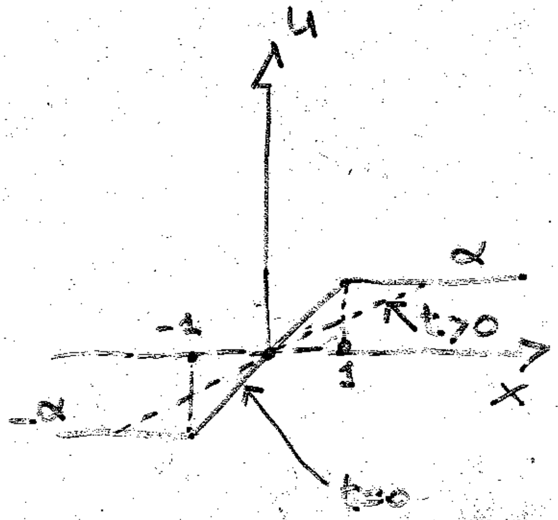
$$\Longrightarrow \quad u(x,t) = u_0\left[\ell(x,t)\right]$$ ammesso che si possa invertire per trovare $\ell(x,t)$

Definiamo le seguenti condizioni iniziali:

$$u_0(\ell) = \begin{cases} -\alpha & \ell < -1 \\ \alpha \ell & -1 \le \ell \le 1 \\ \alpha & \ell > 1 \end{cases} \qquad \alpha = \text{cost.}$$

Se $\alpha > 0$ l'inversione è possibile per ogni $t \geq 0$.





Le funzioni inverse sono :

$$s(x,t)=t\ ; \qquad \ell(x,t)=\begin{cases} x+\alpha t & \text{in } ① \\ x/(1+\alpha t) & \text{in } ② \\ x-\alpha t & \text{in } ③ \end{cases}$$

① $\ell = x+\alpha t < -1 \Rightarrow x < -1-\alpha t$

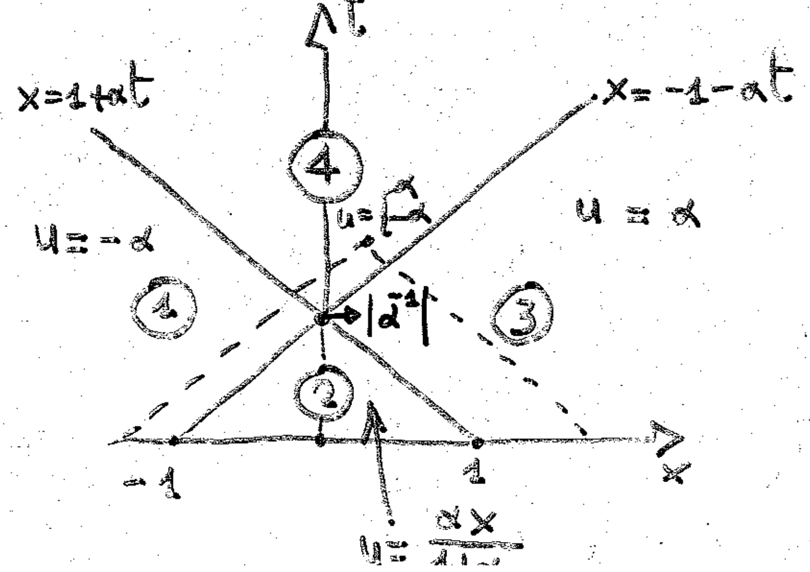
② $-1 \leq \ell = \dfrac{x}{1+\alpha t} \leq 1 \Rightarrow -1-\alpha t \leq x \leq 1+\alpha t$

③ $\ell = x-\alpha t > 1 \Rightarrow x > 1+\alpha t$

La soluzione è :

$$u(x,t)=u_0\left[\ell(x,t)\right]=\begin{cases} -\alpha & \text{in } ① \\ \alpha x/(1+\alpha t) & \text{in } ② \\ \alpha & \text{in } ③ \end{cases}$$

Se $\alpha < 0$ c'è ancora un'unica funzione inversa nelle regioni ① ② e ③ seguenti:



PDE non lineare iperbolica può non possedere soluzioni continue <u>in grande</u>. Discontinuità (o salti) sono chiamati:

"shocks"

Studiamo la PDE di Burger per $\mu \to 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Per avere senso fisico la soluzione alla precedente PDE deve essere il $\lim\limits_{\mu \to 0}$ della soluzione della PDE di Burger

Difficoltà di studiare il processo al $\lim\limits_{\mu \to 0}$: considerazioni intuitive:

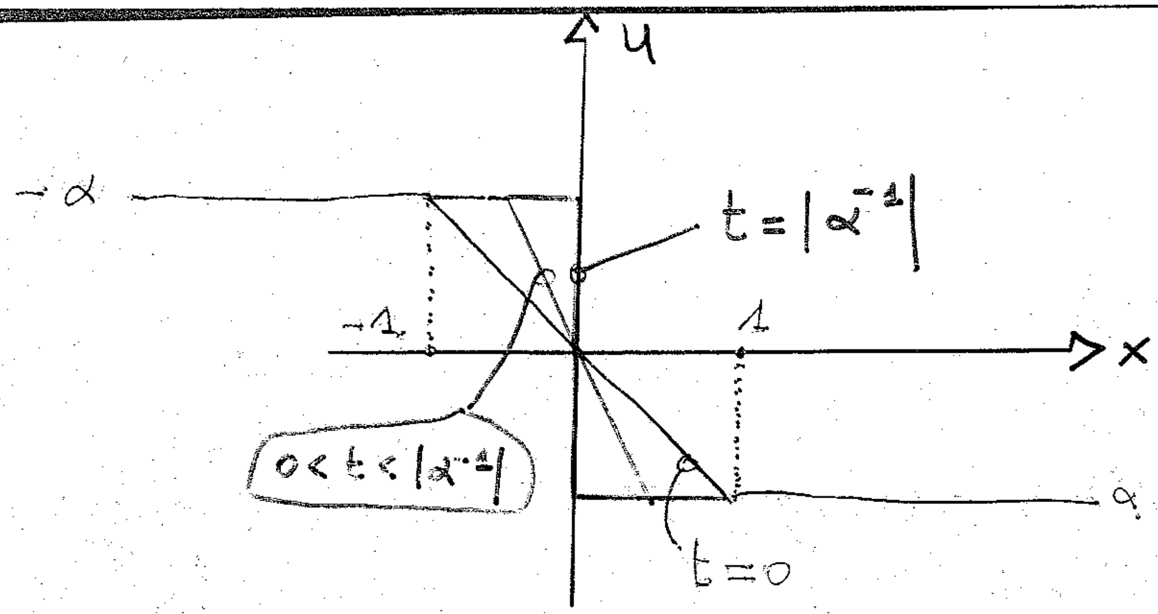
Velocità dello "shock" nel piano $x-t$:

$$\overline{u} = \frac{u_- + u_+}{2}$$

Se $x = f(t)$ è il luogo dei punti descritto dallo "shock", questa eq. equivale alle eq. differenziale:

$$\frac{df}{dt} = \overline{u}(x,t) = \overline{u}[f(t),t]$$

Completiamo la discussione del problema di Cauchy con $\alpha < 0$. 8-11



Al tempo $t = |\alpha^{-1}|$ ha inizio lo "shock". La sua velocità è :

$$\bar{u}(x,t) = \frac{-\alpha + \alpha}{2} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{df}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \text{cost.} = 0$$

"Shock" stazionario : il luogo è l'asse dei tempi con $t > |\alpha^{-1}|$. Per $t > |\alpha^{-1}|$ la soluzione è stazionaria e vale :

$$\begin{cases} u = -\alpha & x < 0 \\ u = \alpha & x > 0 \end{cases}$$

Ciò si dimostra facendo $\lim\limits_{\mu \to 0}$ della PDE di Burger

Infatti l'eq. stazionaria di Burger è:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Risolviamola con le condizioni seguenti:

1) $x \to +\infty$: $u \to \alpha$ $du/dx \to 0$

2) $x \to -\infty$: $u \to -\alpha$ $du/dx \to 0$

3) $x = 0$: $u = 0$ (simmetria)

Scrivendo:

$$u\,du = \mu \frac{d^2u}{dx^2}\,dx \qquad \text{integrando}$$

$$\frac{u^2}{2} = \mu \frac{du}{dx} + C_1 \qquad x \to \infty \implies C_1 = \alpha^2/2$$

$$\Downarrow$$

$$x \to 0 \qquad \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{C_1}{\mu} = -\frac{\alpha^2}{2\mu}$$

Scrivendo l'eq. rossa come: $\frac{1}{2}\left(u^2 - \alpha^2\right) = \mu \frac{du}{dx}$

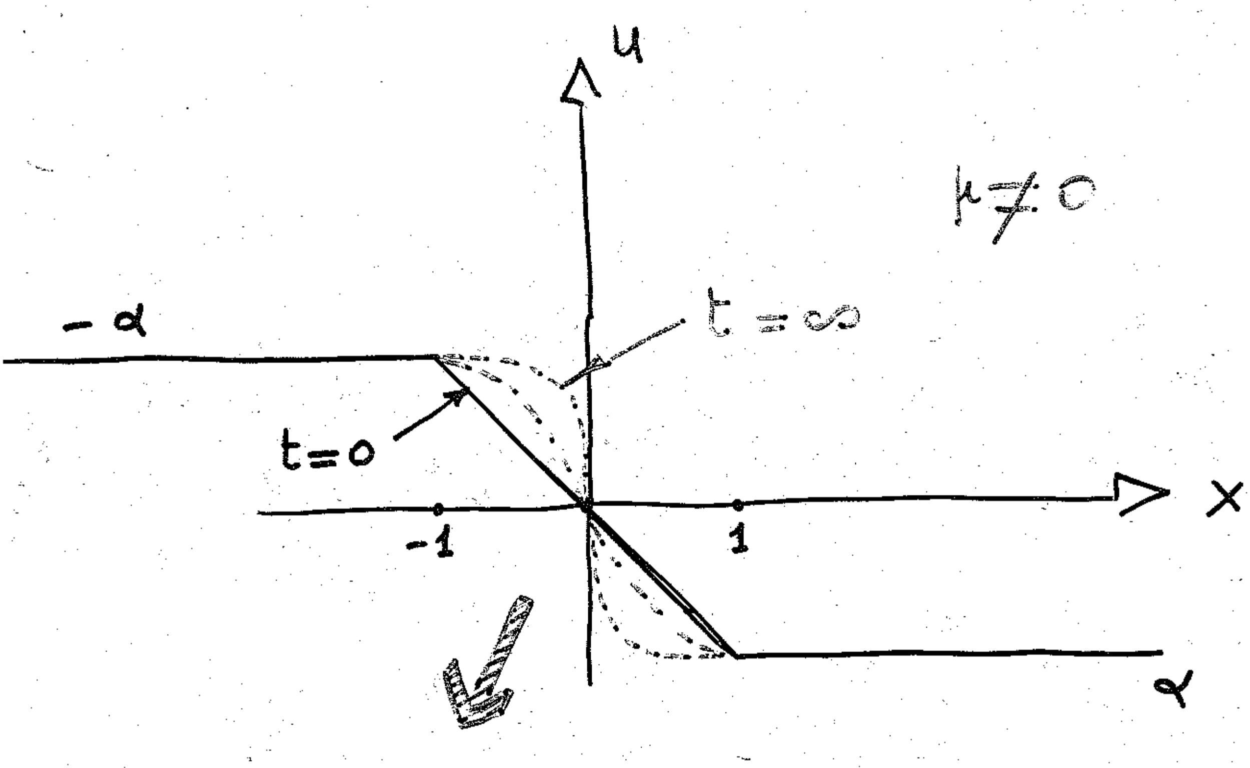
$dx = \dfrac{2\mu}{u^2 - \alpha^2}\,du$ integrando (sotto condizione $|u| < |\alpha|$):

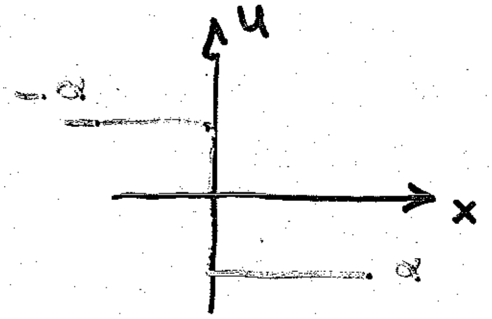
$$x = \frac{\mu}{|\alpha|} \ln \frac{\alpha + u}{\alpha - u} + C_2$$

$$x = 0 \text{ dà } u = 0 \implies C_2 = 0$$

Quindi:

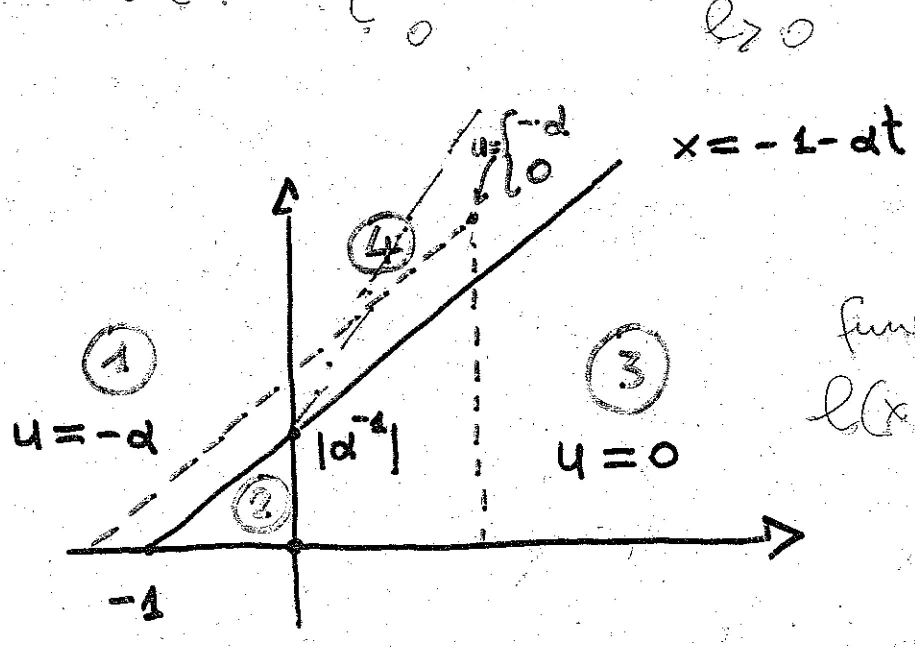
$$x = \frac{\mu}{|\alpha|} \ln \frac{\alpha + u}{\alpha - u} \qquad (|u| < \alpha)$$



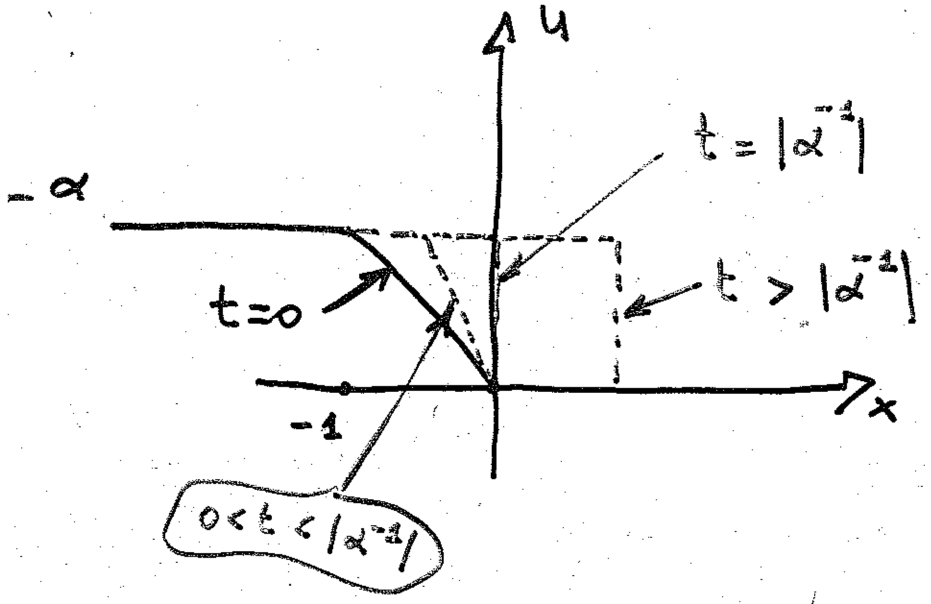


Per avere uno "shock" non stazionario si considerino le seguenti condizioni iniziali:

$$u_0(\ell) = \begin{cases} -\alpha & \ell < -1 \\ \alpha \ell & -1 \leq \ell \leq 0 \\ 0 & \ell > 0 \end{cases} \qquad \alpha < 0$$



In ④ la funzione inversa $\ell(x,t)$ non è unica



Lo shock ha inizio al tempo $t = |\alpha^{-1}|$.

A sinistra dello "shock" $u_- = -\alpha$; a destra $u_+ = 0$

Velocità dello "shock" : $\bar{u} = \frac{df}{dt} = \frac{-\alpha + 0}{2} = \frac{|\alpha|}{2}$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{|\alpha|}{2} t + \text{cost}$$

Per $x = 0$ deve essere $t = |\alpha^{-1}|$ cioè:

$$0 = \frac{|\alpha| \cdot |\alpha^{-1}|}{2} + \text{cost} \Rightarrow \text{cost} = -\frac{1}{2}$$

Il luogo dei punti dello shock ha equazione :

$$x = \frac{1}{2}\left(|\alpha| t - 1\right)$$

bisettrice del settore di piano 4 della fig. di pag. 45.

Problema della soluzione stazionaria della PDE:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{in} \qquad -1 \le x \le 1$$

con $\quad u(-1) = 1 \quad$ e $\quad u(1) = -1$

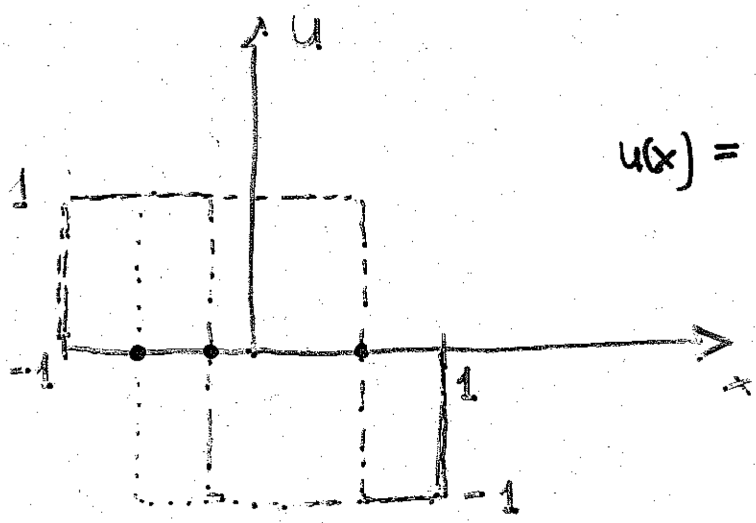
Posto $\partial u/\partial t = 0$ la PDE si riduce a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = cost$$

entrambe le condizioni non possono essere soddisfatte.

Se si ammettono soluzioni discontinue, le condizioni possono essere entrambi soddisfatte ma si perde l'unicità.

Per soluzione stazionaria velocità dello shock $\bar{u} = 0$ e quindi ci sono infinite soluzioni in $-1 \le x \le 1$



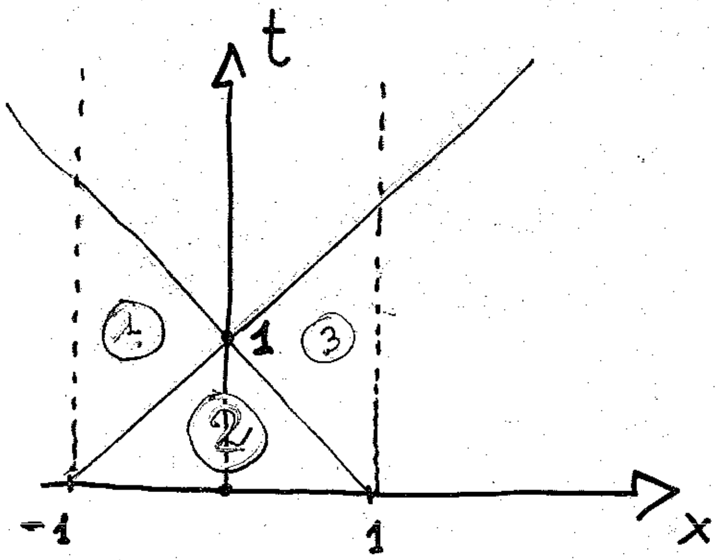
$$u(x) = \begin{cases} 1 & -1 \le x < x_0 \\ -1 & x_0 \le x \le x_1 \end{cases}$$

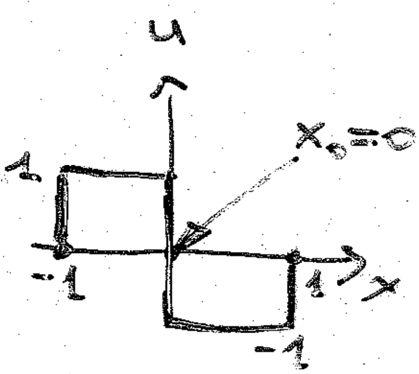
Mancanza di unicità: perchè lo stazionario dipende in realtà dalle condizioni iniziali. Siano ad es. poste:

$$u(x,0) = -x \qquad -1 \le x \le 1$$

La soluzione, simile a quella già discussa, è:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{in } 1 \\ x/(t-1) & \text{in } 2 \\ -1 & \text{in } 3 \end{cases}$$





Qui lo stazionario si ha per $t = 1$ con $x_0 = 0$ (unica soluzione).

Non tutti gli stazionari sono sensibili alle condizioni iniziali

Es.: $u(-1) = 1$; $u(1) = 0$. Velocità dello shock:

$$\bar{u} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

L'unico stazionario ammissibile è:

$$u(x,\infty) = 1 \qquad -1 \leq x \leq 1$$

indipendentemente dalle condizioni iniziali.