PDE ellittiche

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = 0$$

- temperatura
- potenziale idraulico, elettrostatico, magnetostatico
- potenziale del flusso irrotazionale
- potenziale gravitazionale
- spostamenti della membrana

Funzioni armoniche

PDE + condizioni ausiliarie = problema ben posto

Significato fisico delle B.C.

Legge di Fourier:

$$\vec{q} = k_H \vec{\nabla} u \qquad [k_H] = \frac{Cal}{t\,L\,T} = \frac{Cal}{s \cdot m \cdot {}^\circ C}$$

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = k_H \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = k_H \frac{\partial u}{\partial n}$$

Principio di "sovrapposizione continua":

$$u(x,y) = \int_{\Gamma} K(\xi)\, w(\xi, x, y)\, d\xi$$

$$\nabla^2 u = \nabla^2 \int_\Gamma k(\xi)\, w(\xi, x, y)\, d\xi =$$

$$= \int_\Gamma k(\xi)\, \nabla^2 w(\xi, x, y)\, d\xi = 0$$

PDE non omogenea :

$$\nabla^2 u = f(x,y) \qquad \text{Poisson}$$

Soluzione generale $v + w_0$ dove:

v = armonica

$\nabla^2 w_0 = f$ $\quad$ w_0 è una soluzione particolare

Proprietà <u>max-min</u> delle funzioni armoniche! se Ω è un dominio limitato, a connessione semplice di frontiera $\partial\Omega$, e se u è armonica su Ω e continua su $\Omega \cup \partial\Omega$ allora u prende il suo valore massimo ed il suo valore minimo sulla frontiera $\partial\Omega$.

Il problema di Dirichlet ha una ed una sola soluzione (per la PDE di Laplace o Poisson)

Tranne $\partial\Omega$ particolari (cerchio, ellisse, rettangolo, ...) si deve ricorrere a <u>soluzioni numeriche</u>

"Soluzioni fondamentali" della PDE Laplace

Se ξ è un punto in uno spazio 2-D o 3-D e $k(\xi,P)$ è singolare in ξ, $k(\xi,P)$ è "soluzione fondamentale" se:

1) $k(\xi,P)$ è armonica di P tranne che in $P=\xi$

2) $\int_{\partial\Gamma} |k(\xi,P)|\, dS \to 0$ per $R \to 0$

essendo R il raggio di una sfera Γ con centro in $P=\xi$

3) $k(\xi,P)$ ha segno costante su $\partial\Gamma$

4) $\int_{\partial\Gamma} \frac{\partial k}{\partial n}(\xi,P)\, dS \to M \neq 0$ per $R \to 0$

Esempi:

$$k(O,P) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{(armonica per } P \neq O\text{)}$$

Su Γ centrata in O si ha:

$$k(O,P) = \frac{1}{R} \qquad \frac{\partial k(O,P)}{\partial n} = -\frac{1}{R^2}$$

Pertanto:

$$\int_{\partial\Gamma} |K(O,P)|\, dS = \int_{\partial\Gamma} \frac{1}{R}\, dS = \frac{1}{R}\int_{\partial\Gamma} dS = \frac{4\pi R^2}{R} = 4\pi R \to 0 \text{ per } R \to 0$$

$$\int_{\partial\Gamma} \frac{\partial K(O,P)}{\partial n} dS = -\int_{\partial\Gamma} \frac{1}{R^2} dS = -\frac{1}{R^2}\int_{\partial\Gamma} dS = -\frac{4\pi R^2}{R^2} = -4\pi \neq 0 \text{ per } R \to 0$$

Poiche ∇^2 è "invariante" per traslazione, in 3-D la soluzione fondamentale con singolarità in ξ è:

$$k(\xi, P) = \frac{1}{\| P - \xi \|_2}$$

In 2-D è:

$$k(\xi, P) = \ln \| P - \xi \|_2$$

$$k(O,P) = \ln r \qquad \frac{\partial k}{\partial n}(O,P) = \frac{1}{r}$$

$$\int_{\partial\Gamma} |k(O,P)| ds = \int_{\partial\Gamma} \ln r \, ds = 2\pi R \ln R \to 0 \quad \text{per } R \to 0$$

$$\int_{\partial\Gamma} \frac{\partial k(O,P)}{\partial n} ds = \int_{\partial\Gamma} \frac{ds}{r} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \neq 0 \quad \text{per } R \to 0$$

Dunque $\quad M = -4\pi \quad$ in 3-D

$\qquad\quad M = 2\pi \quad$ in 2-D

Rappresentazioni integrali della soluzione (PDE Laplace)

u e v funzioni continue in Ω di classe C^2.

Vale l'identità:

$$v\nabla^2 u - u\nabla^2 v = \nabla\cdot\underbrace{(v\nabla u - u\nabla v)}_{\vec{F}} = \operatorname{div}\vec{F}$$

$$\nabla u = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

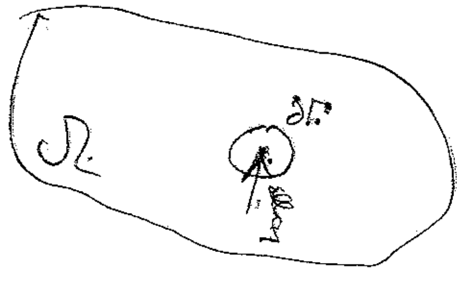
Teorema della divergenza (o del flusso o lemma di Gauss):

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}\vec{F}\, dV = \int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS \qquad (\vec{n} \text{ positiva all'esterno})$$

$$\int_{\Omega} (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)\, dV = \int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS$$

2ª ident. di Green

Posto $v(P) = K(\xi, P)$ soluzione fondamentale



$\partial\Omega$

$\partial\Omega_0 = \partial\Omega + \partial\Gamma$

$$\int_{\partial\Omega_0} u(P)\frac{\partial K}{\partial n}(\xi, P)\, dS = \int_{\partial\Omega_0} K(\xi,P)\frac{\partial u}{\partial n}(P)\, dS - \int_{\Omega_0} K(\xi,P)\nabla^2 u(P)\, dV$$

La normale $\vec{n}$, esterna a $\partial\Omega_0$, punta verso ξ, centro della sfera.

Quindi $\displaystyle\int_{\partial\Gamma} \frac{\partial k(\xi,P)}{\partial n} dS \to -M$. Cioè:

$$\int_{\partial\Omega_0} u(P)\frac{\partial k}{\partial n}(\xi,P)\,dS \to \int_{\partial\Omega} u(P)\frac{\partial k}{\partial n}(\xi,P)\,dS - M u(\xi)$$

$$\int_{\partial\Omega_0} k(\xi,P)\frac{\partial u}{\partial n}(P)\,dS \to \int_{\partial\Omega} k(\xi,P)\frac{\partial u}{\partial n}(P)\,dS + \cancel{\int_{\partial\Gamma} k(\xi,P)\frac{\partial u}{\partial n}(P)\,dS}$$

Facciamo il lim per $R \to 0$ $(\Omega_0 \to \Omega)$

$$\boxed{u(\xi) = \frac{1}{M}\int_{\partial\Omega}\left[u(P)\frac{\partial k}{\partial n}(\xi,P) - k(\xi,P)\frac{\partial u}{\partial n}(P)\right]dS(P) + \frac{1}{M}\int_{\Omega} k(\xi,P)\nabla^2 u(P)\,dV(P)}$$

Se ξ appartiene a $\partial\Omega$, M va sostituito con $M/2$

$$\boxed{u(\xi) = \frac{2}{M}\int_{\partial\Omega}\left[u(P)\frac{\partial k}{\partial n}(\xi,P) - k(\xi,P)\frac{\partial u}{\partial n}(P)\right]dS(P) + \frac{2}{M}\int_{\Omega} k(\xi,P)\nabla^2 u(P)\,dV(P)}$$

Sia ora u la soluzione della PDE $\nabla^2 u = f$:

$$u(\xi) = \frac{1}{M}\int_{\partial\Omega}\left[u(P)\frac{\partial k}{\partial n}(\xi,P) - k(\xi,P)\frac{\partial u}{\partial n}(P)\right] dS(P) +$$
$$+ \frac{1}{M}\int_{\Omega} k(\xi,P) f(P)\, dV(P)$$

Problemi 2-D:

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\left[\frac{u}{r}\frac{\partial r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n}\right] ds + \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega}(\ln r)\, f\, dV$$

Problemi 3-D:

$$u(\xi) = +\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\left[\frac{u}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right] dS - \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{f}{r}\, dV$$

Se ξ è sulla frontiera:

$$u(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{\partial\Omega}\left[\frac{u}{r}\frac{\partial r}{\partial n} - \ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right] ds + \frac{1}{\pi}\int_{\Omega} f \ln r\, dV \qquad (2\text{-D})$$

$$u(\xi) = +\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\left[\frac{u}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right] dS - \frac{1}{2\pi}\int\frac{f}{r}\, dV \qquad (3\text{-D})$$

$\Downarrow$

con $r = \| P - \xi \|_2$

eq. di base per il $\boxed{\text{B.E.M.}}$