EQUAZIONI PARABOLICHE

1) $$\frac{\partial T}{\partial t} - k_T \nabla^2 T = 0$$ eq. di diffusione del calore

k_T = coeff. di diffusività termica (L^2/T)

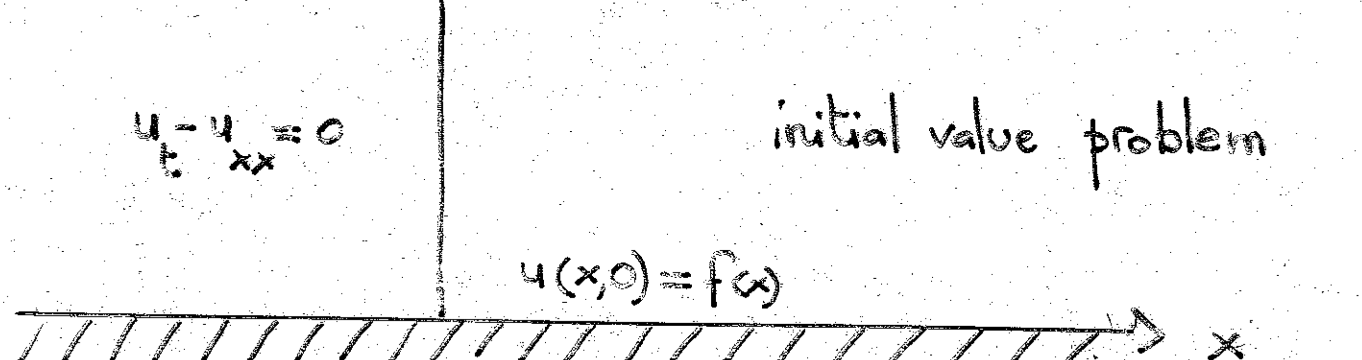
2) $$\frac{\partial h}{\partial t} - k_H \nabla^2 h = 0$$ eq. della filtrazione in mezzi porosi

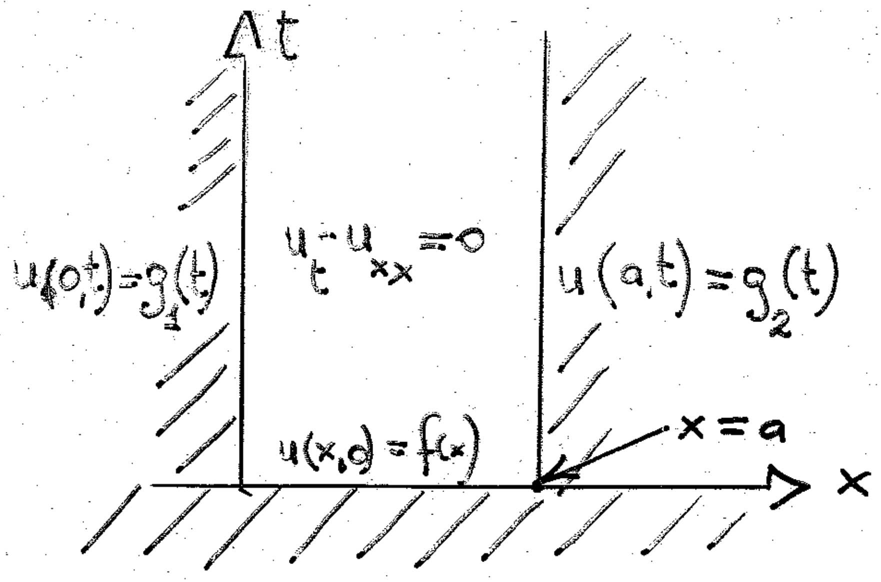
k_H = coeff. di diffusività idraulica (L^2/T)

3) $$\frac{\partial c}{\partial t} + v \cdot \nabla c - D \nabla^2 c = -\lambda c$$ eq. di convezione-diffusione con decadimento

Equazione prototipo delle PDE paraboliche:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$





initial b.v. problem

La soluzione di un "i.v. problem" o di un "i.b.v. problem" è unica. Entrambi i problemi sono <u>ben posti</u>.

"<u>Separazione delle variabili</u>" per "initial b. v. problems".

Il problema è il seguente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \overset{x}{\underset{0 \qquad\quad 1}{\vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\dashv}} \qquad \begin{cases} u(x,0) = u_1(x) & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Soluzione della forma:

$$u(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t)$$

Sostituendo nell'equazione:

$$\varphi(x)\,\psi'(t) = \varphi''(x)\,\psi(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)}$$

Ne consegue :

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\lambda \qquad \text{costante}$$

cioè 2 ODE :

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = 0 \\ \psi'(t) + \lambda\psi(t) = 0 \end{cases}$$

con $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$

Necessariamente : $\searrow$

$\lambda > 0$ e pertanto :

$$\varphi(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$$

$$\varphi(0) = 0 \implies c_2 = 0$$

$$\varphi(1) = 0 \implies \sin(\sqrt{\lambda}) = 0$$

Ergo :

$$\sqrt{\lambda} = n\pi \implies \lambda = n^2\pi^2 \qquad n = 1, 2, \dots$$

cioè infinite "autofunzioni" o "autosoluzioni" :

$$\varphi_n(x) = \sin(n\pi x) \qquad n = 1, 2, \dots$$

Sostituendo λ_n nell'equazione per $\psi(t)$ si ha:

$$\psi_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t} \qquad n = 1, 2, \dots$$

Eq. lineare $\Rightarrow$ ogni combinazione lineare è soluzione:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

serie di seni di FOURIER

Coeff. A_n dalle condizioni iniziali:

$$u(x,0) = u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)$$

Si dimostra facilmente che:

$$\int_0^1 \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad n \neq m$$

Quindi:

$$A_k = 2\int_0^1 u_1(x)\sin(k\pi x)\,dx$$

essendo:

$$\int_0^1 \sin^2(k\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$$

Per b.c. più generali, sempre per $0<x<1$, la soluzione di un qualsiasi "i. b. v. problem" è:

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-n^2\pi^2 t} \exp(in\pi x)$$

con $i = \sqrt{-1}$ e C_n coefficienti complessi da determinarsi dai dati iniziali.

2° tipo di "initial b.v. problem":

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < 1$$

$$u(x,0) = 0 \qquad t = 0$$

$$u(1,t) = 0 \qquad t \geq 0$$

$$u(0,t) = 1 \qquad t > 0$$

Si dimostra che la soluzione è:

$$u_1(x,t) = 1 - x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x)}{n} \exp(-n^2\pi^2 t)$$

Se $u(0,t) = f_1(t)$ per la linearità:

$$u(x,t) = \int_0^t \left.\frac{df_1}{dt}\right]_{t=\tau} u_1(x, t-\tau)\,d\tau$$ integrale di convoluzione

Invertiamo le 2 condizioni al contorno, cioè:

$$u(1,t)=1 \quad e \quad u(0,t)=0$$

Per la soluzione basta sostituire x con $1-x$:

$$u_2(x,t) = 1-(1-x) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[n\pi(1-x)]}{n}\exp(-n^2\pi^2 t) =$$

$$= x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\pi x)}{n}\exp(-n^2\pi^2 t)$$

Se $u(1,t) = f_2(t)$:

$$u(x,t) = \int_0^t \left.\frac{df_2}{dt}\right]_{t=\tau} u_2(x,t-\tau)\,d\tau \quad \text{altro i.d.c.}$$

Soluzione generale su $\overset{0}{\vdash}\!\!\overset{x}{\text{—}}\!\!\overset{1}{\dashv}$ per qualsiasi "initial boundary value problem" è (per la linearità):

$$u(x,t) = \int_0^t \left.\frac{df_1}{dt}\right]_{t=\tau} u_1(x,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t \left.\frac{df_2}{dt}\right]_{t=\tau} u_2(x,t-\tau)\,d\tau +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)\exp(-n^2\pi^2 t)$$

con gli A_n $(n=1,2,\dots)$ calcolati come prima

Per un "i.v. problem" sull'intero asse x possiamo usare una formulazione integrale simile a quella delle PDE ellittiche

Funzione di Green:

$$G(x,t) = \frac{\exp(-x^2/4t)}{2\sqrt{\pi t}}$$

$\sigma = \sqrt{2t}$

Proprietà:

1) $\lim_{t \to 0} G(x,t) = 0 \qquad x \neq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)\, dx = 1 \qquad t > 0$

3) $\lim_{t \to 0} G(x,t) = \delta(0,x)$ delta di Dirac centrata in $x = 0$

Se $u_1(x)$ definisce le condizioni iniziali per $-\infty < x < \infty$ la rappresentazione integrale della soluzione è:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_1(\xi)\exp\left[-(x-\xi)^2/4t\right]}{2\sqrt{\pi t}}\, d\xi$$