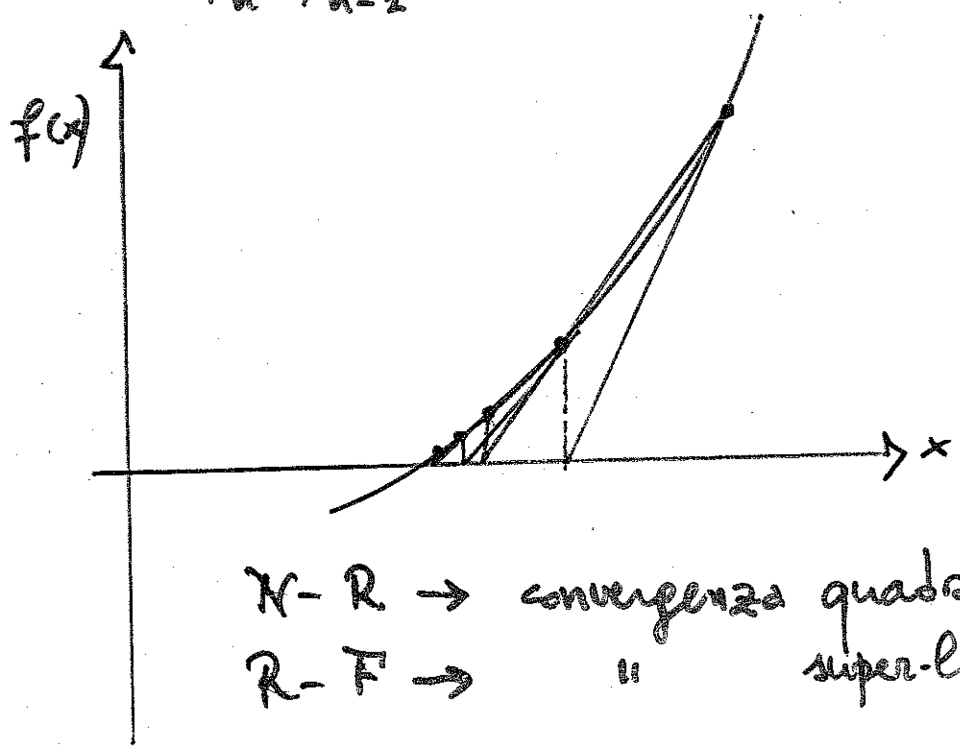
Richiami $\Rightarrow$ $f(x) = 0$ $\quad \xi$: radice

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{k_n}$$

Casi di interesse:

1) $k_n = f'(x_n)$ Newton - Raphson (tangente variabile)

2) $k_n = \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ Regula Falsi (secante variabile)



N-R $\rightarrow$ convergenza quadratica ($p=2$)

R-F $\rightarrow$ " super-lineare ($p = 1.618$

Definizione di convergenza:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \xi|}{|x_n - \xi|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = M \rightarrow \text{fattore di convergenza}$$

se $p = 1$ $\rightarrow$ convergenza lineare (o geometrica)

N. R. rilassato : $x_{n+1} = x_n - \omega \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\quad 0 < \omega < 2$

Sistemi di equazioni non lineari

Cominciamo con 2 equazioni:

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases}$$

Metodo di Newton-Raphson:

$$F(x_n+h,\ y_n+k) = 0$$
$$G(x_n+h,\ y_n+k) = 0$$

x_n, y_n: approssimazioni n-esime

Espandiamo in serie di Taylor e tronchiamo:

$$\left.\begin{aligned} F(x_n,y_n) + h \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_n\\y=y_n}} + k\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_n\\y=y_n}} &= 0 \\ G(x_n,y_n) + h \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_n\\y=y_n}} + k\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_n\\y=y_n}} &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{sistema lineare in } h \text{ e } k$$

Matrice dei coefficienti $\rightarrow$ Jacobiano J_n

$$J_n = \begin{bmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{bmatrix}_{\substack{x=x_n\\y=y_n}}$$

Risolto il sistema per h e k si aggiorna la soluzione

$$x_{n+1} = x_n + h$$
$$y_{n+1} = y_n + k$$

e si ripete identicamente

Ordine di convergenza $p = 2$

Caso speciale : sistema "mildly nonlinear":

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m + f_1(x_1) = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m + f_2(x_2) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mm}x_m + f_m(x_m) = 0 \end{cases}$$

N-R generalizzato produce:

$$x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} - \omega \frac{a_{11}x_1^{(n)} + a_{12}x_2^{(n)} + \cdots + a_{1m}x_m^{(n)} + f_1(x_1^{(n)})}{a_{11} + f_1'(x_1^{(n)})}$$

$$x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)} - \omega \frac{a_{21}x_1^{(n+1)} + a_{22}x_2^{(n)} + \cdots + a_{2m}x_m^{(n)} + f_2(x_2^{(n)})}{a_{22} + f_2'(x_2^{(n)})}$$

$$\vdots$$

$$x_m^{(n+1)} = x_m^{(n)} - \omega \frac{a_{m1}x_1^{(n+1)} + a_{m2}x_2^{(n+1)} + \cdots + a_{mm}x_m^{(n)} + f_m(x_m^{(n)})}{a_{mm} + f_m'(x_m^{(n)})}$$

Se $f_1(x_1), f_2(x_2), \cdots, f_m(x_m)$ sono costanti $(b_1, b_2, \cdots b_m)$ il sistema è lineare ed N-R generalizzato è chiamato "Successive Over-Relaxation", SOR,

cioè coincide col metodo di rilassamento studiato nel corso di Calcolo Numerico $(0 < \omega < 2)$

SOR :

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \omega\left[x_i^{(n+1,S)} - x_i^{(n)}\right]$$

Se le derivate sono complicate si possono sostituire con rapporti incrementali.

<u>Regula-Falsi generalizzato per 2-D</u>:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \omega \dfrac{F(x_n, y_n)}{a_n} \rightarrow a_n = \dfrac{F(x_n, y_n) - F(x_{n-1}, y_n)}{x_n - x_{n-1}} \\[2ex] y_{n+1} = y_n - \omega \dfrac{G(x_{n+1}, y_n)}{b_n} \rightarrow b_n = \dfrac{G(x_{n+1}, y_n) - G(x_{n+1}, y_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} \end{cases}$$

$0 < \omega < 2$ in genere $0 < \omega < 1$
(sotto-rilassamento)

Per partire:

$$x_1 = x_0 - \omega \frac{F(x_0, y_0)}{a_0} \rightarrow a_0 = \frac{F(x_0+\varepsilon, y_0) - F(x_0, y_0)}{\varepsilon}$$

$$y_1 = y_0 - \omega \frac{G(x_1, y_0)}{b_0} \rightarrow b_0 = \frac{G(x_1, y_0+\varepsilon) - G(x_1, y_0)}{\varepsilon}$$

ε quantità piccola (dipende da F e G)

Generalizzazione di N-R 2-D :

$$x_{n+1} = x_n - \omega \frac{F(x_n, y_n)}{\partial F/\partial x\Big|_{\substack{x=x_n\\ y=y_n}}} \qquad 0<\omega<2$$

$$y_{n+1} = y_n - \omega \frac{G(x_{n+1}, y_n)}{\partial G/\partial y\Big|_{\substack{x=x_{n+1}\\ y=y_n}}} \qquad 0<\omega<2$$

Ovviamente l'ordine di convergenza $p<2$ $(\omega=1)$

Estensione a m- variabili :

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0\\ &F_2(x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0\\ &\vdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \vdots\\ &F_m(x_1, x_2, \cdots x_m) = 0 \end{aligned}$$

N-R (classico) :

$$\begin{aligned} &F_1\left(x_1^{(n)}+h_1^{(n)}, x_2^{(n)}+h_2^{(n)}, \cdots, x_m^{(n)}+h_m^{(n)}\right) = 0\\ &F_2\left(\quad '' \quad\quad '' \quad\quad '' \quad \right) = 0\\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\ &F_m\left(\quad '' \quad\quad '' \quad\quad '' \quad \right) = 0 \end{aligned}$$

Si espandono le singole equazioni in serie di Taylor e si troncano:

$$
\begin{cases}
F_1\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots x_m^{(n)}\right) + \left.\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}\right|_n h_1^{(n)} + \left.\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}\right|_n h_2^{(n)} + \dots + \left.\dfrac{\partial F_1}{\partial x_m}\right|_n h_m^{(n)} = 0 \\
\vdots \\
F_m\left(\quad '' \quad \right) + \left.\dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}\right|_n h_1^{(n)} + \left.\dfrac{\partial F_m}{\partial x_2}\right|_n h_2^{(n)} + \dots + \left.\dfrac{\partial F_m}{\partial x_m}\right|_n h_m^{(n)} = 0
\end{cases}
$$

Jacobiano (matrice dei coefficienti):

$$
J_n = \begin{bmatrix}
\partial F_1/\partial x_1 & \partial F_1/\partial x_2 & \dots & \partial F_1/\partial x_m \\
\partial F_2/\partial x_1 & \partial F_2/\partial x_2 & \dots & \partial F_2/\partial x_m \\
\vdots & & & \\
\partial F_m/\partial x_1 & \partial F_m/\partial x_2 & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_m}
\end{bmatrix}_n \rightarrow \overbrace{J_n h^{(n)} = -F(x_n)}^{\text{compatto}}
$$

Si aggiorna la soluzione dopo aver risolto il sistema

$$
\begin{cases}
x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} + h_1^{(n)} \\
x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)} + h_2^{(n)} \\
\vdots \\
x_m^{(n+1)} = x_m^{(n)} + h_m^{(n)}
\end{cases}
\rightarrow x^{(n+1)} = x^{(n)} + h^{(n)} \quad \text{oppure} \quad \boxed{x^{(n+1)} = x^{(n)} + \underbrace{\omega}_{\text{fattore di rilassamento}} h^{(n)}}
$$

N-R ha convergenza $p = 2$. <u>Generalizzazione m-D di N-R</u>:

$$
\begin{cases}
x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} - \omega \dfrac{F_1\left(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right)}{\left.\partial F_1/\partial x_1\right|_n} \\
x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)} - \omega \dfrac{F_2\left(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n)}, \dots x_m^{(n)}\right)}{\partial F_2/\partial x_2 \left[\text{calcolato in } x_1^{(n+1)}, x_2^{(n)}, \dots x_m^{(n)}\right]} \\
\vdots \\
x_m^{(n+1)} = x_m^{(n)} - \omega \dfrac{F_m\left(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, \dots, x_{m-1}^{(n+1)}, x_m^{(n)}\right)}{\partial F_m/\partial x_m \left[\text{calcolato in } n+1 \text{ tranne } x_m^{(n)}\right]}
\end{cases}
$$

Metodo del Gradiente per

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \phi(x,y) = F^2(x,y) + G^2(x,y) \geq 0$$

Posto $\phi(x_0,y_0) = C$ la curva

$$\phi(x,y) = C$$

è una linea "equipotenziale". Al variare di C si ottiene una famiglia di curve. Variazione max lungo il gradiente. In x_0, y_0 esso ha componenti:

$$m_0 = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \qquad n_0 = \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

Si cerca $x_1 y_1$ sulla retta per (x_0, y_0) parallela al gradiente:

$$\frac{x - x_0}{-m_0} = \frac{y - y_0}{-n_0} = t$$

laddove $\phi(x_1,y_1)$ risulta minimo. Sostituendo x ed y in $\phi(x,y)$ e derivando rispetto a t:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0-m_0 t \\ y=y_0-n_0 t}} m_0 + \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0-m_0 t \\ y=y_0-n_0 t}} n_0 = 0$$

Questa è una eq. in t che si risolve numericamente (e.g. N-R)
Detta t_0 la soluzione si ha la nuova approssimazione

$$\boxed{x_1 = x_0 - m_0 t_0 \qquad y_1 = y_0 - n_0 t_0}$$