# Soluzione di un sistema non lineare con la Regula Falsi generalizzata per la determinazione degli angoli conico di taglio ed elicoidale di taglio di una cremagliera

Annamaria Mazzia

Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate
Torre Archimede 3° piano stanza 326

e-mail: mazzia@dmsa.unipd.it

Corso di Metodi Numerici per l'Ingegneria
dispense e altro materiale su
http://dispense.dmsa.unipd.it

Un creatore elicoidale viene usato per costruire una ruota dentata conica.

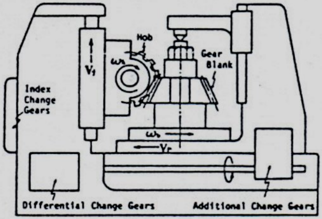
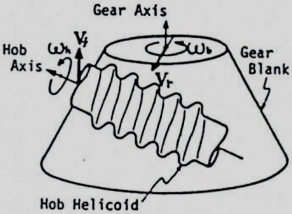



**Fig. 1** Schematic view of hobbing machine



# *Il problema da risolvere*

Si ha un un sistema di due equazioni non lineari le cui incognite sono l'angolo conico di taglio e l'angolo elicoidale di taglio di una cremagliera.
Per risolverlo si usa lo schema generalizzato della Regula Falsi.
I dati di input e output relativi agli angoli sono espressi in gradi. Tutti i calcoli delle funzioni coinvolte nel sistema da risolvere saranno fatti in radianti. Quindi si dovrà effettuare una trasformazione gradi-radianti e poi radianti-gradi.

# *Formulazione del problema*

I dati in possesso:

- $\psi$ = angolo dell'elica della cremagliera immaginaria
- $\delta$ = angolo del cono di taglio
- $\gamma$ = inclinazione dell'elica sul cerchio primitivo del creatore
- $\Gamma$ = angolo che fa coincidere la cremagliera immaginaria con la cremagliera di base

I dati da trovare (le incognite)

- $x$ = angolo conico di taglio
- $y$ = angolo elicoidale di taglio

# Il sistema da risolvere

1. $\tan\delta - \tan x/\sqrt{1+\tan^2\Gamma\tan^2 x} = 0$

   con $\sin\Gamma = \sin y\cos\gamma - \sin\gamma\sqrt{\cos^2 y + \tan^2 x}$

2. $\tan\psi - \tan\beta\dfrac{\left[\cos\Gamma + (\cos\gamma/\sin y)\tan\Gamma\tan^2 x\right]}{\sqrt{\cos^2\Gamma + \tan^2 x}} = 0$

   $\tan\beta = \sin y\cos\Gamma/(\cos\gamma - \sin y\sin\Gamma)$

# *Intervalli di ammissibilità*

$$0 \leq \psi \leq 15^\circ$$
$$0 \leq \delta \leq 35^\circ$$
$$\gamma = 7^\circ \, 20' \, 03''$$

# *Osservazione sulla seconda equazione*

Vediamo con attenzione la seconda equazione

$$\tan\psi - \tan\beta \frac{\left[\cos\Gamma + (\cos\gamma/\sin y)\tan\Gamma\tan^2 x\right]}{\sqrt{\cos^2\Gamma + \tan^2 x}} = 0$$

$\tan\beta = \sin y \cos\Gamma / (\cos\gamma - \sin y \sin\Gamma)$ Possiamo avere una

divisione per zero se $\sin y = 0$.

# *Cosa fare?*

Scriviamo $\tan\beta$ come

$\tan\beta = \sin y \cos\Gamma / (\cos\gamma - \sin y \sin\Gamma) = \sin y\alpha$

dove
$\alpha = \cos\Gamma / (\cos\gamma - \sin y \sin\Gamma)$

e andiamo a sostituire nell'equazione che ci interessa (la seconda del sistema), mettendo in evidenza $\sin y$ al fine di semplificare l'equazione stessa.

Prendiamo la seconda equazione e sostituiamo:

$$\tan\psi - \tan\beta \frac{\left[\cos\Gamma + (\cos\gamma/\sin y)\tan\Gamma\tan^2 x\right]}{\sqrt{\cos^2\Gamma + \tan^2 x}} = 0$$

$$\tan\psi - \alpha\sin y \frac{\left[\cos\Gamma + (\cos\gamma/\sin y)\tan\Gamma\tan^2 x\right]}{\sqrt{\cos^2\Gamma + \tan^2 x}} = 0$$

$$\tan\psi - \frac{\left[\alpha\sin y\cos\Gamma + \alpha\sin y\,(\cos\gamma/\sin y)\tan\Gamma\tan^2 x\right]}{\sqrt{\cos^2\Gamma + \tan^2 x}} = 0$$

$$\tan\psi - \frac{\left[\alpha\sin y\cos\Gamma + \alpha\,(\cos\gamma)\tan\Gamma\tan^2 x\right]}{\sqrt{\cos^2\Gamma + \tan^2 x}} = 0$$

# *Scopo dell'esercitazione*

Utilizzando lo schema generalizzato della Regula Falsi, applicato alternativamente alle due equazioni, trovare $x$ ed $y$ con uno scarto finale inferiore a $10^{-12}$ determinando altresì il valore che le due funzioni del sistema assumono per i valori finali di uscita di $x$ ed $y$.

Trovare il risultato per alcuni valori ammissibili di $\delta$ e $\psi$.

Infine esprimere $x$ ed $y$ in gradi, primi e secondi.

# *Lo schema della Regula Falsi nel caso di una sola funzione*

Se abbiamo una sola funzione dipendente da una variabile $f(x)$ e vogliamo trovare un'approssimazione della radice $\xi$ della $f$, quindi $f(\xi) = 0$, l'algoritmo diventa (richiamo):

1. $x_0, x_1$ assegnati
2. $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ per $n = 1, 3, \ldots$ fino a convergenza.

# *Lo schema della Regula Falsi nel caso di due funzioni*

Nel caso dell'esercitazione che dobbiamo risolvere, abbiamo due equazioni in due incognite - $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$. Per trovare le radici di $f_1$ e $f_2$, cioè la coppia di punti $(\xi, \eta)$ che, contemporaneamente, annulla le due funzioni - $f_1(\xi, \eta) = 0$ e $f_2(\xi, \eta) = 0$, a applichiamo lo schema della Regula Falsi in questo modo (per comodità introduciamo subito un fattore di rilassamento $\omega$)

# L'Algoritmo

1. si sceglie $\omega$ nell'intervallo $]0,1]$
2. si assegnano i valori iniziali $x_0, x_1$ e $y_0, y_1$
3. per $n = 1, 2, \ldots$ fino a convergenza
   - si approssima la variabile $x_{n+1}$ utilizzando i valori $x_n$ e $x_{n-1}$ e $y_n$
   - la nuova approssimazione è perciò:
     $$x_{n+1} = x_n - \omega f_1(x_n, y_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f_1(x_n, y_n) - f_1(x_{n-1}, y_n)}$$
   - si approssima la variabile $y_{n+1}$ utilizzando i valori $y_n$ e $y_{n-1}$ e la nuova approssimazione $x_{n+1}$
   - la nuova approssimazione è
     $$y_{n+1} = y_n - \omega f_2(x_{n+1}, y_n) \frac{y_n - y_{n-1}}{f_2(x_{n+1}, y_n) - f_2(x_{n+1}, y_{n-1})}$$

# *Quando si ha una buona approssimazione?*

Quando possiamo dire di essere arrivati a convergenza, cioè di avere una buona approssimazione delle radici $(\xi, \eta)$ che annullanno $f_1$ e $f_2$? Diciamo di essere arrivati a

convergenza quando il valore assoluto della differenza tra due approssimazioni successive è minore di una tolleranza prefissata, vale a dire quando i valori assoluti degli scarti $|x_{n+1} - x_n|$ e $|y_{n+1} - y_n|$ sono minori di una tolleranza *tol* (ad esempio $10^{-12}$).

L'algoritmo viene dunque applicato fintantochè $n$ è minore di un numero massimo di iterazioni *itmax* e $|x_{n+1} - x_n|$ e $|y_{n+1} - y_n|$ sono maggiori di *tol*.
Sotto forma di pseudo-codice possiamo scrivere il punto 3 dell'algoritmo come:

3. `Fino a quando`
   $n \leq itmax$ e $(|x_{n+1} - x_n| > tol$ o $|y_{n+1} - y_n| > tol)$
   `allora`
   - $n = n + 1$
   - `si applica l'algoritmo della Regula Falsi.`

Una conferma che siamo arrivati alla soluzione cercata è data dalla verifica che $f_1(x_{n+1}, y_{n+1})$ e $f_2(x_{n+1}, y_{n+1})$ sono molto vicini a zero.

# *Quali sono le nostre funzioni?*

Nella nostra esercitazione, le funzioni sono quelle date prima:

$$f_1(x, y) = \tan\delta - \tan x / \sqrt{1 + \tan^2\Gamma(x, y)\tan^2 x}$$

$$f_2(x, y) = \tan\psi - \tan\beta(x, y)\frac{\left[\cos\Gamma(x, y) + (\cos\gamma / \sin y)\tan\Gamma(x, y)\tan^2 x\right]}{\sqrt{\cos^2\Gamma(x, y) + \tan^2 x}}$$

# *Scelta delle approssimazioni iniziali*

- Sappiamo che il metodo della Regula Falsi ha bisogno di due approssimazioni iniziali $x_0$, $x_1$ relativamente alla variabile $x$ e $y_0$, $y_1$ relativamente alla variabile $y$.
- Questi dati possono essere scelti in maniera arbitraria, per esempio $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, oppure, visto il significato fisico di tali variabili, si può fissare $x_0 = \delta$ e $y_0 = \psi$.
- Per quanto riguarda $x_1$ e $y_1$, pur potendo scegliere per essi dei valori arbitrari, conviene applicare in maniera "opportuna" il metodo di Newton-Raphson.

Tuttavia, se dovessimo applicare il metodo di Newton-Raphson cosí come è, dovremmo andare a calcolare le derivate parziali del primo ordine rispetto a $x$ e rispetto a $y$ di due funzioni che, nel nostro caso, sono abbastanza complicate...
Approssimiamo, allora le derivate mediante dei rapporti incrementali:
Per $x_1$, il metodo di Newton-Raphson è:

$$x_1 = x_0 - \omega \frac{f_1(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x}}$$

Approssimiamo la derivata parziale mediante:

$$\frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} \approx \frac{f_1(x_0 + \epsilon, y_0) - f_1(x_0, y_0)}{\epsilon}$$

dove $\epsilon$ è una quantità sufficientemente piccola (ad esempio $\epsilon = 10^{-5}$). Perciò

$$x_1 = x_0 - \omega \frac{\epsilon f_1(x_0, y_0)}{f_1(x_0 + \epsilon, y_0) - f_1(x_0, y_0)}$$

Stessa procedura si applica per $y_1$ ottenendo:

$$y_1 = y_0 - \omega \frac{\epsilon f_2(x_1, y_0)}{f_2(x_1, y_0 + \epsilon) - f_2(x_1, y_0)}$$

# *Dati di Input del nostro problema*

- gli angoli $\delta$, $\psi$, $\gamma$ dati in gradi e da trasformare, quindi, in radianti;
- il fattore di rilassamento $\omega$ implementato nello schema della Regula Falsi;
- il numero massimo di iterazioni *itmax* e la tolleranza *tol* di controllo della convergenza dell'algoritmo;
- le approssimazioni iniziali $x_0$ e $y_0$;
- il parametro $\epsilon$ per il calcolo delle approssimazioni $x_1$ e $y_1$.

# *Dati di Output*

- gli angoli $x$ e $y$, opportunamente trasformati in gradi, primi e secondi;
- il valore assunto dalle funzioni $f_1$ e $f_2$ nella soluzione trovata;
- il numero di iterazioni effettuate a convergenza con lo schema della Regula Falsi.

Inoltre, per visualizzare meglio i risultati, conviene salvare, per ogni valore di $\omega$ utilizzato, i valori degli scarti rispetto a $x$ e rispetto a $y$ e riportarli in un grafico semilogaritmico - in tal modo si vede la convergenza del metodo.
Un altro grafico deve riportare, invece, al variare di $\omega$ il diverso numero di iterazioni richieste per arrivare a convergenza: in tal modo si vede il valore ottimale di $\omega$ - quello per cui si ha il minor numero di iterazioni.

# Gradi-radianti-gradi

Sappiamo che $x^\circ : 180 = x^r : \pi$
Quindi $x^r = x^\circ \frac{\pi}{180}$.
In questa formula, tuttavia, non abbiamo considerato il fatto che un angolo viene espresso in gradi, primi e secondi. . .

$$1^\circ : 60' = x^\circ : p' \text{ per i primi}$$
$$x^\circ = p'/60$$
$$1^\circ : 3600'' = x^\circ : s'' \text{ per i secondi}$$
$$x^\circ = s''/3600$$

Quindi

$$x^r = (x^\circ + \frac{p'}{60} + \frac{s''}{3600}) \frac{\pi}{180}$$

Per passare invece dai radianti ai gradi, dobbiamo fare i passaggi inversi:

- $x^\circ = [x^r \dfrac{180}{\pi}]$ ci dà la parte intera (in gradi) dell'angolo. senza tener conto dei primi e dei secondi.
- Si considera quindi la differenza $d' = x^r \dfrac{180}{\pi} - x^\circ$.
  Allora $p' = [60d']$.
- Sia $d'' = 60d' - p'$
  Allora $s'' = [60d'']$. Per ragioni di arrotondamento ci conviene considerare la parte intera di $60d'' + 0.5$, cioè $s'' = [60d'' + 0.5]$.

# *Esempi*

$20^\circ\, 10'\, 5'' \Longrightarrow$ radianti ?

$$\left(20 + \frac{10}{60} + \frac{5}{3600}\right) \frac{\pi}{180} = 0.3519989732$$

$x^r = 0.3519989732$

$x^r = 2.4 \Longrightarrow$ gradi, primi, secondi ? ? ?

- $2.4 \frac{\pi}{180} = 143.2394488$
  $x^\circ = 143$ prendo la parte intera
- $0.2394488 \cdot 60 = 14.366928$
  $p' = 14$
- $0.366928 \cdot 60 + 0.5 = 22.51568$
  $s'' = 22$

L'angolo in gradi, primi e secondi è $143^\circ, 14', 22''$.

# *Cosa portare all'esame*

Fare un programma in un linguaggio di programmazione adatto per tradurre algoritmi numerici (per esempio FORTRAN, MATLAB) che implementa l'algoritmo della Regula Falsi nel caso del nostro problema.
Eseguire almeno questi due casi test:

- **Prova n.1:**
  $\delta = 30°$, $\psi = 0°$;
  $x_0 = 0°$, $y_0 = 0°$.
- **Prova n.2:**
  $\delta = 30°$, $\psi = 0°$;
  $x_0 = \delta$, $y_0 = \psi$.

Il parametro $\omega$ deve variare nell'intervallo $]0, 1]$ in modo da trovare sperimentalmente quello ottimale. Si parta da da $\omega = 0.2$ e si arrivi a $\omega = 1$ con incremento 0.2.

Per ciascuna delle due prove numeriche si faccia:

- un **grafico** che riporta i profili di convergenza per ogni valore di $\omega$ utilizzato. Il grafico deve essere in scala semilogaritmica: l'asse delle ascisse deve riportare il numero di iterazioni effettuate per arrivare a convergenza con lo schema della Regula Falsi e l'asse delle ordinate deve riportare il valore assoluto degli scarti degli angoli $x_k$ e $y_k$ rispettivamente.
- un **grafico** che riporta il diverso numero di iterazioni richieste per arrivare a convergenza al variare del parametro $\omega$.

I grafici devono essere inseriti in una **relazione** scritta che commenta il problema assegnato e i risultati ottenuti. Non dimenticare di riportare i valori numerici in gradi degli angoli che approssimano la soluzione del problema.
Si alleghi, inoltre, il **listato completo del codice** scritto per risolvere il problema assegnato.