

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica e in Ingegneria dell'Energia
Progetto numerico al calcolatore

Parte III

**Esercitazione numerica:
Conduzione di calore in una piastra metallica
piana, omogenea e isotropa**

Indice

1	Formulazione del problema	1
1.1	Soluzione agli elementi finiti	2
2	Il codice di calcolo	3
2.1	Definizione della griglia computazionale	3
2.2	Calcolo della topologia della matrice di rigidità	3
2.3	Calcolo della matrice dei puntatori	5
2.4	Calcolo e assemblaggio dei contributi locali	5
2.5	Calcolo del termine noto	6
2.6	Imposizione delle condizioni al contorno	7
2.7	Soluzione del sistema lineare	7
3	Applicazione del codice	7

1 Formulazione del problema

Si vuole risolvere l'equazione differenziale che governa la conduzione di calore in una piastra metallica piana, omogenea e isotropa:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{f(x, y)}{\rho c K_H} = q(x, y) \quad (1)$$

dove

- T [$^{\circ}C$] è la temperatura,
- K_H [m^2/s] è il coefficiente di diffusività termica
- ρ [Kg/m^3] è la densità della piastra
- c [$Cal/Kg^{\circ}C$] è il calore specifico
- $f(x, y)$ [Cal/m^2s] è il calore aggiunto o sottratto alla piastra per unità di tempo e di area.

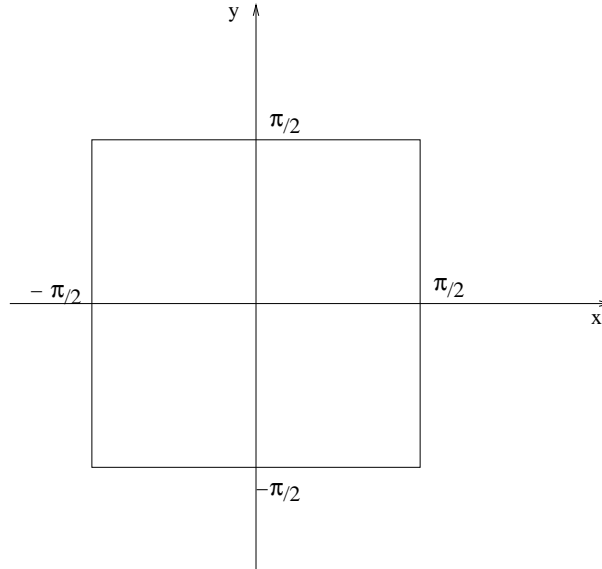


FIGURA 1: Configurazione geometrica della piastra.

Si ponga $q(x, y) = 4$ e si consideri la (1) su un quadrato di lato π (vedi Figura 1) e soggetto alle condizioni al contorno:

$$T = 0 \quad \text{per } x, y = \pm\pi/2. \quad (2)$$

La soluzione analitica di questo *boundary value problem* è :

$$T(x, y) = -\frac{\pi^2}{2} + 2x^2 + \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cosh [(2k-1)y]}{(2k-1)^3 \cosh [(2k-1)\pi/2]} \cos [(2k-1)x] \quad (3)$$

L'equazione (1) con la condizione al contorno (2) viene risolta usando il metodo degli elementi finiti (FEM) con elementi triangolari e funzioni base lineari.

In virtù della simmetria del problema stesso, la (1) può essere risolta sulla porzione di piastra S che appartiene al quadrante positivo (vedi Figura2).

In tal caso, le condizioni al contorno diventano:

$$\begin{cases} T = \bar{T} = 0 & \text{sui lati AB e BC: condizione di Dirichlet} \\ \frac{\partial T}{\partial n} = 0 & \text{sui lati AD e DC: condizione di Neumann} \end{cases} \quad (4)$$

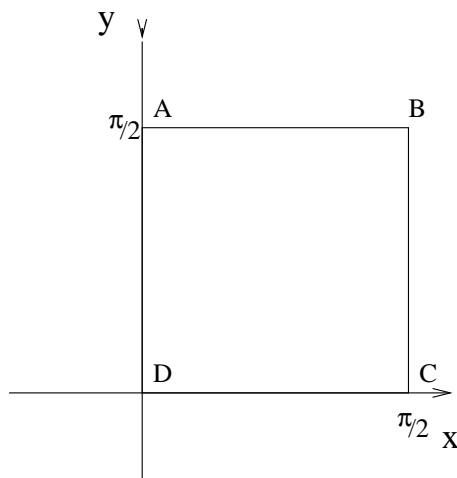


FIGURA 2: Porzione di piastra del quadrante positivo di lato $\pi/2$

dove $\frac{\partial T}{\partial n}$ rappresenta la derivata normale della T .

Il problema di conduzione del calore nella piastra metallica viene dunque risolto nella porzione che appartiene al quadrante positivo.

1.1 Soluzione agli elementi finiti

Il funzionale associato al problema (1) è dato da:

$$\Omega(T) = \iint_S \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] + qT \, dS \quad (5)$$

È infatti immediato osservare che l'equazione di Eulero relativa ad Ω è esattamente la (1). Esso deve essere minimizzato sul dominio quadrato \mathcal{S} soggetto alle condizioni al contorno (4).

Procediamo seguendo il metodo variazionale di Ritz. Si scriva la soluzione approssimata \tilde{T} come:

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^n T_i \xi_i(x, y) \quad (6)$$

dove $\xi_i = \xi_i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$ sono opportune funzioni di forma o funzioni base e i T_i corrispondono ai valori puntuali assunti da T su n punti del dominio \mathcal{S} (le incognite del problema). Sostituendo \tilde{T} in (5) ed annullando le derivate di $\Omega(\tilde{T})$ rispetto ai coefficienti T_i al fine di determinare la soluzione approssimata che minimizza il funzionale si ottiene:

$$\frac{\partial \Omega(\tilde{T})}{\partial T_i} = \iint_S \left[\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \right) + q \xi_i \right] dS = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

Sostituendo in (7) l'espressione (6) di \tilde{T} si ha:

$$\iint_S \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi_j}{\partial y} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \right) T_j + q \xi_i \right] dS = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$

Le (8) costituiscono un sistema di n equazioni nelle n incognite T_1, T_2, \dots, T_n :

$$H\mathbf{T} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (9)$$

Il sistema (9) possiede un'infinità di soluzioni e per renderlo determinato occorre imporre la condizione al contorno di Dirichlet data da (4).

Come funzioni base utilizziamo dei polinomi di interpolazione bidimensionali continui a tratti e con supporto locale. Pertanto, l'espressione assunta dal coefficiente h_{ij} dell'equazione i -esima che moltiplica l'incognita T_j è il risultato dell'assemblaggio dei contributi locali $h_{ij}^{(e)}$:

$$h_{ij} = \sum_e h_{ij}^{(e)} = \sum_e \iint_{S^{(e)}} \left[\frac{\partial \xi_j}{\partial x} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi_j}{\partial y} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \right] dS^{(e)} \quad (10)$$

mentre il termine noto f_i della medesima equazione è :

$$f_i = \sum_e f_i^{(e)} = \sum_e \iint_{S^{(e)}} q \xi_i dS^{(e)} \quad (11)$$

L'equazione (10) ci permette di osservare che la matrice di rigidezza H è simmetrica e definita positiva. In più, la scelta di utilizzare come funzioni base dei polinomi a supporto locale fa sì che H sia anche sparsa. Pertanto il sistema (9) può essere efficientemente risolto con il metodo del Gradiente Coniugato Modificato (GCM).

2 Il codice di calcolo

Il problema definito dalla (1) va risolto mediante l'implementazione di un codice di calcolo automatico. È opportuno che, data la complessità dell'algoritmo globale, tale codice abbia una struttura modulare, con i vari moduli facilmente intercambiabili fra di loro. Si consiglia, ad esempio, di seguire lo schema descritto nel diagramma di flusso di Figura 3.

2.1 Definizione della griglia computazionale

Si consideri una suddivisione del dominio \mathcal{S} in elementi triangolari. La triangolazione è individuata da una tabella che fornisce per ciascun elemento la successione in senso antiorario degli indici dei nodi che lo caratterizzano. Ciascun nodo è, infine, determinato da una coppia di coordinate cartesiane x e y .

Nella definizione della griglia è importante individuare le zone del contorno del dominio caratterizzate da condizioni di Dirichlet, di Neumann o miste. Generalmente, il *boundary* del problema viene determinato indicando i nodi che lo compongono e la corrispondente condizione, vale a dire il valore \bar{T} laddove si imponga Dirichlet ed il valore $\partial T / \partial n$ laddove si imponga Neumann. Nel caso in esame, le condizioni al contorno (4) di Dirichlet verranno individuate selezionando i nodi che cadono sul lato superiore e sul lato destro di \mathcal{S} ed imponendo su ciascuno di essi un valore \bar{T} nullo.

Per le condizioni al contorno di Neumann, invece, essendo condizioni di tipo naturale (flusso nullo), esse sono automaticamente assegnate sulla parte inferiore e sul lato sinistro del contorno e , di conseguenza, non bisogna imporre alcuna condizione in maniera esplicita.

La definizione della griglia computazionale, e cioè della tabella dei triangoli, delle coordinate nodali e dei nodi al contorno, viene ottenuta nella presente esercitazione utilizzando il programma FORTRAN `griglia.f`.

2.2 Calcolo della topologia della matrice di rigidezza

La topologia della matrice H è costituita dal vettore degli indici di colonna \mathbf{JA} e dal vettore delle posizioni degli elementi diagonali \mathbf{IA} . Essi sono univocamente determinati dai contatti nodali definiti dalla maglia computazionale, i quali individuano tutti gli elementi potenzialmente non nulli della matrice di rigidezza. Poiché nel nostro caso la matrice è simmetrica, si memorizzano solo gli elementi della parte triangolare alta di H e cioè solo gli elementi h_{ij} per cui $j \geq i$.

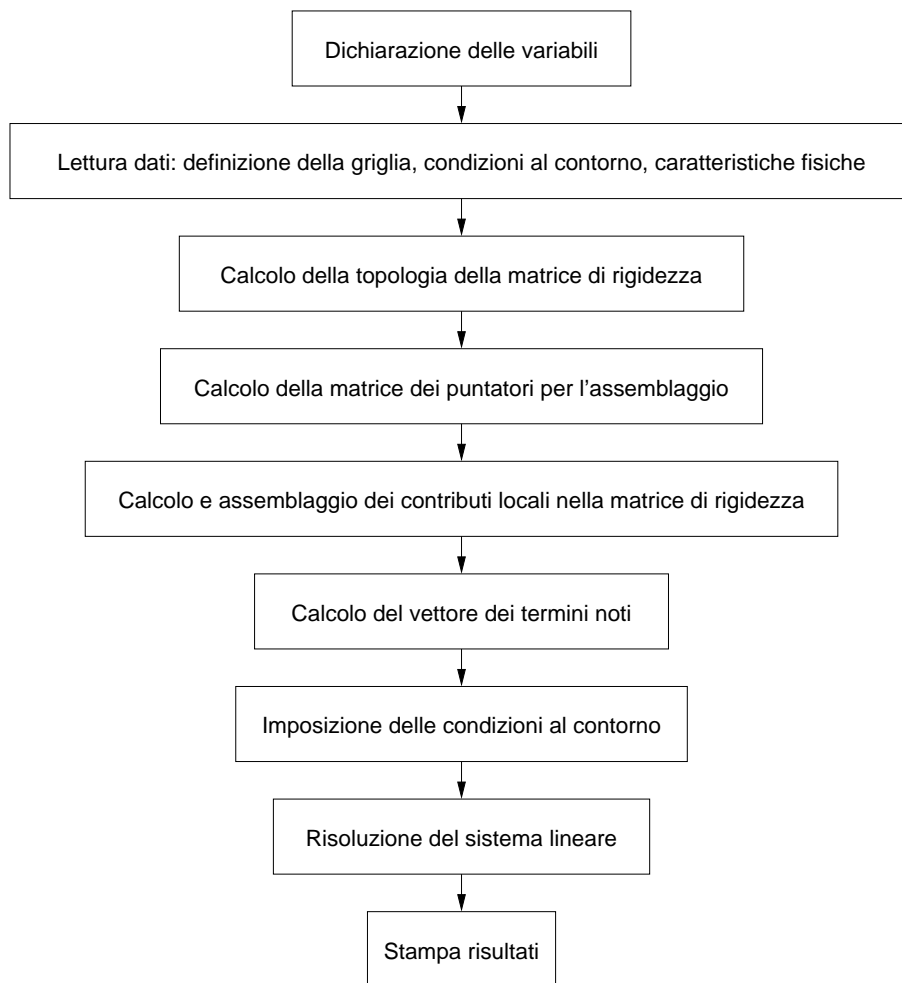


FIGURA 3: *Diagramma di flusso di massima per il codice FEM.*

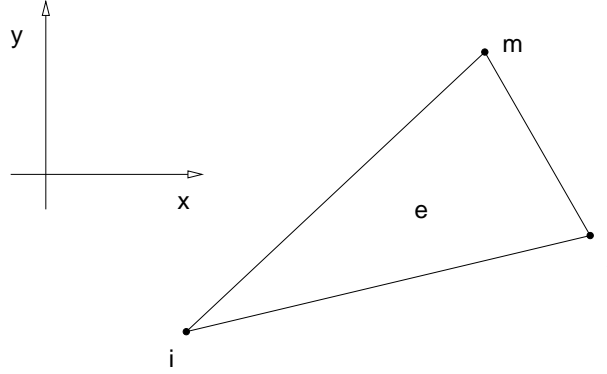


FIGURA 4: Generico elemento triangolare i, j, m .

2.3 Calcolo della matrice dei puntatori

L'esecuzione dell'operazione di assemblaggio della matrice di rigidezza è resa più complessa dalla tecnica di memorizzazione compatta. Per facilitare l'automatizzazione di tale procedura, conviene definire un vettore di matrici di puntatori TRIJA. Il coefficiente $\text{TRIJA}(i, j, k)$ individua la posizione a cui va aggiunto il contributo locale $h_{ij}^{(k)}$.

2.4 Calcolo e assemblaggio dei contributi locali

Suddividiamo il dominio \mathcal{S} in elementi triangolari e ed indichiamo con $\tilde{T}^{(e)}$ la soluzione approssimata sull'elemento e :

$$\tilde{T}^{(e)}(x, y) = \sum_{k=1}^3 T_k \xi_k(x, y) \quad (12)$$

Nel generico elemento triangolare di Figura 4 $\tilde{T}^{(e)}$ varia linearmente in funzione delle variabili nodali T_i, T_j, T_m , che rappresentano la soluzione \tilde{T} sui nodi i, j, m . Le funzioni di forma ξ_k , infatti, sono calcolate utilizzando un'interpolazione lineare e sono convenientemente scelte in modo tale da:

- assumere valori non nulli solamente all'interno dell'elemento (supporto locale);
- valere 1 sul nodo cui sono associate e 0 sugli altri.

Esse assumono pertanto l'espressione:

$$\begin{aligned} \xi_i(x, y) &= (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta \\ \xi_j(x, y) &= (a_j + b_j x + c_j y) / 2\Delta \\ \xi_m(x, y) &= (a_m + b_m x + c_m y) / 2\Delta \end{aligned} \quad (13)$$

dove Δ è l'area dell'elemento:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix},$$

i coefficienti a_i, b_i e c_i sono dati da:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m \\ c_i &= x_m - x_j \end{aligned}$$

e gli altri si ottengono con una permutazione degli indici in senso antiorario:

$$a_j = x_m y_i - x_i y_m \quad b_j = y_m - y_i \quad c_j = x_i - x_m$$

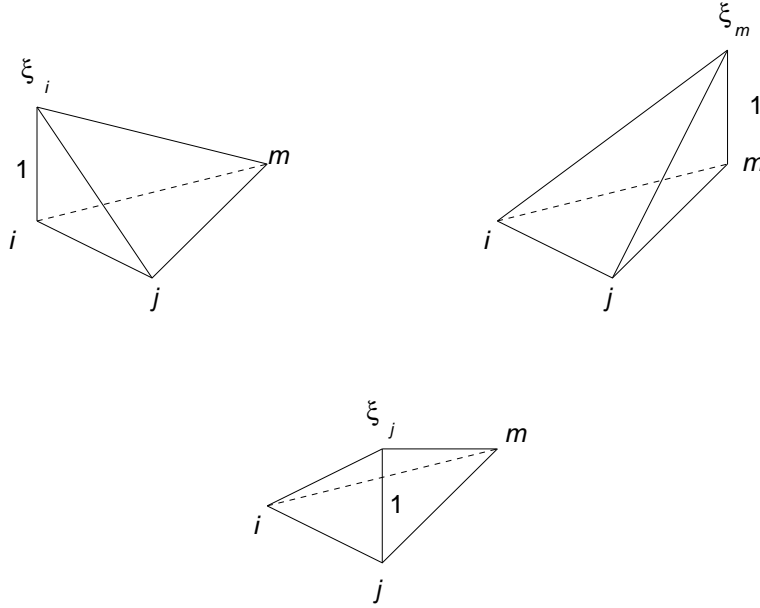


FIGURA 5: Funzioni base lineari definite sul generico triangolo di vertici i, j, m .

$$a_m = x_i y_j - x_j y_i \quad b_m = y_i - y_j \quad c_m = x_j - x_i$$

L'andamento delle funzioni basi ξ_k è mostrato in Figura 5.

Il termine generico della matrice locale del sistema FEM (detta *matrice di rigidezza locale*) dalla (10) vale:

$$h_{ij}^{(e)} = \iint_{S^{(e)}} \left[\frac{\partial \xi_j}{\partial x} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi_j}{\partial y} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \right] dS^{(e)} = \frac{1}{4\Delta} (b_i b_j + c_i c_j) \quad (14)$$

e quindi la matrice di rigidezza locale $H^{(e)}$ per un elemento triangolare a 3 nodi si può esprimere come:

$$H^{(e)} = \frac{1}{4\Delta} \left\{ \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_m \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_m \\ b_m b_i & b_m b_j & b_m b_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_m \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_m \\ c_m c_i & c_m c_j & c_m c_m \end{bmatrix} \right\} \quad (15)$$

I contributi (15) vanno assemblati nella matrice di rigidezza globale H attraverso la matrice dei puntatori TRIJA, costruendo in tal modo il vettore reale SYSMAT dei termini non nulli della matrice di rigidezza.

2.5 Calcolo del termine noto

Il contributo locale (11) al termine noto \mathbf{f} nell'equazione i -esima del sistema (9) ha espressione:

$$f_i^{(e)} = \iint_{S^{(e)}} q \xi_i dS^{(e)} = \frac{1}{3} q \Delta \quad (16)$$

Nel caso in esame, si è assunto $q = 4$. Pertanto, la componente i -esima del termine noto globale risulta:

$$f_i = \frac{1}{3} q \sum_e \Delta = \frac{4}{3} \sum_e \Delta \quad (17)$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i triangoli che hanno un vertice nel nodo i . In sostanza, si può dire che il termine noto è pari al prodotto tra il termine noto della (1) e l'area di appartenenza del nodo i , cioè $1/3$ dell'area del patch di triangoli che condividono il nodo i . Può essere quindi conveniente predisporre un vettore contenente l'area di appartenenza relativa a ciascun nodo della griglia di calcolo.

2.6 Imposizione delle condizioni al contorno

Si verifica facilmente che la matrice locale $H^{(e)}$ è singolare. Infatti la somma delle righe (colonne) produce la riga (colonna) nulla. Ciò comporta ovviamente che anche la matrice globale H sia singolare, come si poteva altresì dedurre dal fatto che, se si prescinde dalle condizioni al contorno, la (1) ammette un'infinità di soluzioni. L'imposizione delle condizioni al contorno di Dirichlet trasforma la H in una matrice regolare. Si tratta, quindi, di imporre le condizioni di Dirichlet sulla parte di contorno interessata.

Le condizioni al contorno di Dirichlet si impongono preassegnando il valore della temperatura nella fase di soluzione del sistema globale. Per far questo sarebbe necessario imporre un valore unitario al termine diagonale corrispondente al nodo di Dirichlet, azzerare tutti gli elementi extradiagonali della riga e della colonna corrispondenti, ed uguagliare il termine noto al valore della condizione di Dirichlet. Poiché è piuttosto complesso, data la simmetria di H e la sua memorizzazione compatta, cercare tutti i termini extradiagonali relativi alla colonna del nodo di Dirichlet, conviene sostituire l'elemento diagonale della matrice di rigidezza con un valore molto grande, ad esempio $R_{max} = 10^{15}$, ed uguagliare il termine noto corrispondente al valore di Dirichlet moltiplicato per R_{max} . Nel nostro caso, basterà moltiplicare per R_{max} l'elemento diagonale ed annullare il termine noto corrispondente. In questo modo la condizione al contorno sarebbe soddisfatta esattamente se R_{max} fosse ∞ ; in pratica, è sufficiente usare R_{max} circa 10 ordini di grandezza maggiore degli elementi di H .

2.7 Soluzione del sistema lineare

Poiché la matrice di rigidezza H è sparsa, simmetrica e definita positiva, il sistema lineare (9), risultante dalle procedure di assemblaggio dei contributi locali sugli elementi e del termine noto, e dall'imposizione delle condizioni al contorno, viene risolto con il metodo del Gradiente Coniugato Modificato (GCM).

La velocità di convergenza del GCM risulta essere controllata dal rapporto λ_1/λ_n fra gli autovalori (positivi) estremi della matrice di iterazione $E = HK^{-1}$. Le migliori performance si ottengono, in genere, adottando come matrice di preconditionamento la decomposta incompleta di Cholesky definita secondo Kershaw. La convergenza può essere ulteriormente accelerata migliorando preliminarmente la stima \mathbf{T}_0 della soluzione iniziale con poche (2-3) iterazioni dello schema delle correzioni residue (CR). L'iterazione del GCM è completata quando il residuo relativo è inferiore ad una prefissata tolleranza, comunque non superiore a 10^{-6} .

3 Applicazione del codice

Lo studente implementi un codice di calcolo robusto ed efficiente per la soluzione numerica del problema descritto nel primo paragrafo della presente nota mediante la tecnica degli elementi finiti. Si verifichi la correttezza del codice confrontando la soluzione numerica ottenuta con quella analitica (3).

Per la soluzione analitica, si osservi che, essendo la somma di una serie e non potendo fare la somma di infiniti termini, bisogna considerare una somma parziale che ci dia un sufficiente numero di cifre decimali corrette per poter fare il confronto con la soluzione numerica. La somma parziale della serie fino a $k = 8$ ci dà una soluzione che presenta corrette almeno quattro cifre decimali (il che significa che, aumentando l'estremo superiore della somma parziale, le prime quattro cifre decimali restano invariate). Considerando invece, la somma parziale fino a $k = 11$ sono corrette almeno le prime cinque cifre decimali. Lo studente può confrontare, dunque, la soluzione numerica prendendo come soluzione analitica la somma parziale della serie fino a $k = 11$.

Quindi si studi la convergenza del metodo quando la dimensione degli elementi finiti triangolari sia progressivamente ridotta secondo un fattore costante. Si pensi di raffinare la griglia triangolare secondo lo schema illustrato in Figura 6. Ogni triangolazione più fine è ottenuta dalla precedente aggiungendo un nuovo nodo sul punto medio di ciascun lato. Pertanto ad ogni raffinamento i triangoli quadruplicano. La cosa interessante è che i nodi delle griglie più grossolane

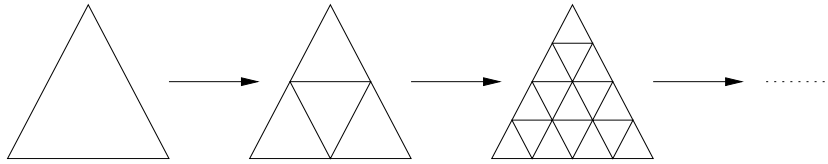


FIGURA 6: Schema di raffinamento della griglia ad elementi finiti.

sono un sottoinsieme di quelle più fini ed il rapporto fra le lunghezze dei lati si dimezza ad ogni raffinamento.

Utilizzando il codice `griglia.f`, basta ogni volta raddoppiare il numero delle suddivisioni lungo l'asse x e lungo l'asse y per raffinare la griglia rispetto alla precedente.

Lo studio della convergenza degli elementi finiti alla soluzione analitica consiste nel raffinare la mesh 3 o 4 volte e verificare il seguente importante risultato: la norma euclidea dell'errore diminuisce come ℓ^2 , dove ℓ è una dimensione rappresentativa della triangolazione (in pratica dell'ordine del lato di un qualsiasi triangolo).

La norma euclidea della funzione errore è per definizione:

$$\varepsilon = \left[\iint_S (\hat{T} - T)^2 dS \right]^{1/2} \quad (18)$$

dove \hat{T} è la soluzione numerica calcolata mediante il codice agli elementi finiti e T è la soluzione analitica (3). L'integrale (18) può essere calcolato numericamente mediante la "midpoint rule", vale a dire:

$$\varepsilon = \left\{ \sum_{i=1}^n \left[(\hat{T}_i - T_i)^2 \sum_e \frac{\Delta}{3} \right] \right\}^{1/2} \quad (19)$$

in cui la sommatoria sugli elementi e è estesa a tutti i triangoli aventi in comune il nodo i . In pratica, il quadrato della differenza fra la soluzione numerica e quella analitica su ciascun nodo va pesato con l'area afferente al nodo già memorizzata per il computo delle componenti del termine noto.

Si costruiscano 4 griglie di calcolo ottenute raffinando regolarmente la triangolazione iniziale ricavata dalla suddivisione del dominio in 8 triangoli (si usi il codice `griglia.f`).

Lo studente descriva lo svolgimento dell'esercitazione in una breve **relazione** completata dai seguenti allegati **minimi**:

- **tabella di confronto** fra la soluzione numerica e quella analitica per la griglia più grossolana con il calcolo dell'errore puntuale;
- **diagrammi di convergenza** in scala semilogaritmica del GCM per la soluzione del sistema: si presenti un diagramma con tutti i profili di convergenza relativi alle mesh assegnate ottenuti partendo da $\mathbf{x}_0 = K^{-1}\mathbf{f}$ ed utilizzando sia $K^{-1} = D^{-1}$ che $K^{-1} = (\tilde{L}\tilde{L}^T)^{-1}$. Si ponga sull'asse delle ascisse il numero di iterazioni e sull'asse delle ordinate la norma euclidea del residuo relativo;
- **diagramma di convergenza** in scala semilogaritmica del GCM per la soluzione del sistema con 1, 2, 5, 10 e 20 iterazioni preliminari effettuate con lo schema delle Correzioni Residue: per questo test si utilizzi la mesh più fine usando $K^{-1} = (\tilde{L}\tilde{L}^T)^{-1}$;
- **tabella riassuntiva dei risultati** in cui siano riportati ad ogni raffinamento successivo della triangolazione: (a) il valore ε dell'errore, (b) il rapporto fra l'errore corrispondente alla griglia corrente ed alla griglia meno raffinata immediatamente precedente.
- **il listato completo** del codice di calcolo.

All'esame non sono ammessi grafici, relazioni e codici fotocopiati. Tutto il materiale deve essere portato in originale.