Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica e Ingegneria Energetica
Progetto numerico al calcolatore

Soluzione di un sistema non lineare con la Regula Falsi generalizzata per la determinazione degli angoli conico di taglio ed elicoidale di taglio di una cremagliera

Indice

1 Introduzione

Si deve risolvere un sistema di due equazioni non lineari le cui incognite sono l'angolo conico di taglio e l'angolo elicoidale di taglio di una cremagliera. Per la risoluzione si usa lo schema generalizzato della Regula Falsi, implementato con opportuna programmazione al calcolatore.

Mentre tutti i calcoli sono effettuati esprimendo gli angoli in radianti, il risultato finale deve essere espresso in gradi, primi e secondi.

2 Formulazione del problema

Un creatore elicoidale viene usato per costruire una ruota dentata conica. Siano ψ l'angolo dell'elica della cremagliera immaginaria, δ l'angolo del cono di taglio e γ l'inclinazione dell'elica sul cerchio primitivo del creatore. Indichiamo con x ed y l'angolo conico di taglio e quello elicoidale di taglio, rispettivamente. Infine Γ é l'angolo che fa coincidere la cremagliera immaginaria con la cremagliera di base. Gli angoli incogniti x ed y vengono determinati risolvendo le seguenti equazioni:

1. $\tan\delta - \tan x / \sqrt{1+\tan^2\Gamma\tan^2 x} = 0$
   con $\sin\Gamma = \sin y\cos\gamma - \sin\gamma\sqrt{\cos^2 y + \tan^2 x}$
2. $\tan\psi - \tan\beta\left[\cos\Gamma + (\cos\gamma/\sin y)\tan\Gamma\tan^2 x\right] / \sqrt{\cos^2\Gamma + \tan^2 x} = 0$
   $\tan\beta = \sin y\cos\Gamma / \left(\cos\gamma - \sin y\sin\Gamma\right)$

Sono fissati i seguenti intervalli di ammissibilità e valori:

$$0 \le \psi \le 15^\circ$$
$$0 \le \delta \le 35^\circ$$
$$\gamma = 7^\circ\ 20'\ 03''$$

Utilizzando lo schema generalizzato della Regula Falsi, applicato alternativamente alle due equazioni, trovare x ed y con uno scarto finale inferiore a 10^{-12} determinando altresì il valore che le due funzioni a sinistra del segno "=" assumono per i valori finali di uscita di x ed y. Trovare il risultato per alcuni valori ammissibili di δ e ψ. Infine esprimere x ed y in gradi, primi e secondi.

3 Lo schema della Regula Falsi

Per lo zero di una funzione Lo schema della Regula Falsi (o della secante variabile) nella sua formulazione più nota è utilizzato per trovare lo zero di una singola equazione $f(x)$.

Data, cioè, una funzione $f(x)$ di cui si vuole trovare la radice ξ, tale che $f(\xi) = 0$, si applica l'algoritmo:

Algoritmo 3.1.

1. *x_0, x_1 assegnati*
2. $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ *per $n = 1, 3, \ldots$ fino a convergenza.*

Per gli zeri di funzioni a più variabili Tutti i metodi per la ricerca dello zero di una funzione possono, tuttavia, essere generalizzati per risolvere equazioni non lineari a più variabili.

Consideriamo, dunque, due equazioni $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$ dipendenti da due variabili x e y: si vogliono determinare gli zeri di f_1 e f_2, vale a dire, si vuole trovare la coppia di punti (ξ,η) tale che

$$\begin{cases} f_1(\xi, \eta) = 0 \\ f_2(\xi, \eta) = 0 \end{cases}$$

L'algoritmo della Regula Falsi viene applicato alternativamente alle due equazioni introducendo un fattore di rilassamento ω. Lo schema è il seguente:

ALGORITMO 3.2.

1. *si sceglie* ω *nell'intervallo* $]0, 1]$
2. *si assegnano i valori iniziali* x_0, x_1 *e* y_0, y_1
3. *per* $n = 1, 2, \ldots$ *fino a convergenza*
   - *si approssima la variabile* x_{n+1} *utilizzando i valori* x_n *e* x_{n-1} *e* y_n
   - *la nuova approssimazione è perciò:* $x_{n+1} = x_n - \omega f_1(x_n, y_n) \dfrac{x_n - x_{n-1}}{f_1(x_n, y_n) - f_1(x_{n-1}, y_n)}$
   - *si approssima la variabile* y_{n+1} *utilizzando i valori* y_n *e* y_{n-1} *e la nuova approssimazione* x_{n+1}
   - *la nuova approssimazione è* $y_{n+1} = y_n - \omega f_2(x_{n+1}, y_n) \dfrac{y_n - y_{n-1}}{f_2(x_{n+1}, y_n) - f_2(x_{n+1}, y_{n-1})}$

La convergenza è ottenuta quando il valore assoluto della differenza tra due approssimazioni successive è minore di una tolleranza prefissata, vale a dire quando i valori assoluti degli scarti $|x_{n+1} - x_n|$ e $|y_{n+1} - y_n|$ sono minori di una tolleranza *tol* (ad esempio 10^{-12}).

L'algoritmo viene dunque applicato fintantochè n è minore di un numero massimo di iterazioni *itmax* e $|x_{n+1} - x_n|$ e $|y_{n+1} - y_n|$ sono maggiori di *tol*.

Sotto forma di ciclo, il punto 3 dell'algoritmo si può scrivere come:

3. `Fino a quando` $n \leq itmax$ `e (`$|x_{n+1} - x_n| > tol$ `o` $|y_{n+1} - y_n| > tol$`), allora`
   - $n = n + 1$
   - `si applica l'algoritmo della Regula Falsi`

La conferma che il metodo ha fornito una corretta stima della soluzione cercata si ottiene, inoltre, dalla verifica che $f_1(x_{n+1}, y_{n+1})$ e $f_2(x_{n+1}, y_{n+1})$ siano uguali a zero a meno di una tolleranza.

Osserviamo che, per il problema che dobbiamo risolvere, le funzioni $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ sono:

$$f_1(x, y) = \tan\delta - \tan x / \sqrt{1 + \tan^2\Gamma(x, y) \tan^2 x}$$

$$f_2(x, y) = \tan\psi - \tan\beta(x, y) \left[\cos\Gamma(x, y) + (\cos\gamma / \sin y) \tan\Gamma(x, y) \tan^2 x\right] / \sqrt{\cos^2\Gamma(x, y) + \tan^2 x}$$

Osservazione sulla scelta delle approssimazioni iniziali Per lo svolgimento dell'esercitazione, è conveniente scegliere le approssimazioni iniziali utilizzando alcuni valori che sono già a disposizione del problema.

Da un punto di vista fisico, poichè la prima incognita x ha il significato di angolo conico di taglio e δ - valore dato - rappresenta l'angolo del cono di taglio, ha senso prendere come approssimazione iniziale per la variabile x proprio il valore assegnato a δ. Analogamente, essendo ψ l'angolo dell'elica della cremagliera e y l'angolo elicoidale di taglio, si può prendere come approssimazione iniziale per y il valore di ψ. Quindi $x_0 = \delta$ e $y_0 = \psi$.

D'altra parte, i valori iniziali per x e y possono essere scelti in maniera arbitraria, ad esempio, ponendo $x_0 = y_0 = 0$.

Ovviamente, la scelta dei dati iniziali può influire sulla convergenza o meno del metodo e sul numero di iterazioni per arrivare a convergenza.

Per quanto riguarda, invece, x_1 e y_1, esse sono assegnate applicando il metodo di Newton-Raphson, con lo stesso parametro di rilassamento ω utilizzato nella Regula Falsi, in cui, tuttavia, le derivate parziali delle funzioni f_1 (rispetto a x) e f_2 (rispetto a y) sono approssimate mediante rapporto incrementale. Si ha, quindi:

$$x_1 = x_0 - \omega \frac{f_1(x_0, y_0)}{\frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x}}$$

La derivata parziale $\frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x}$ viene approssimata dalla relazione

$$\frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} \approx \frac{f_1(x_0 + \epsilon, y_0) - f_1(x_0, y_0)}{\epsilon}$$

dove ϵ è una quantità sufficientemente piccola (ad esempio $\epsilon = 10^{-5}$), ottenendo

$$x_1 = x_0 - \omega \frac{\epsilon f_1(x_0, y_0)}{f_1(x_0 + \epsilon, y_0) - f_1(x_0, y_0)}$$

La medesima procedura si segue per ottenere l'approssimazione y_1 dove, tuttavia, si sfrutta il fatto di aver aggiornato il valore della variabile x e, quindi, si valuta la f_2 in x_1 e non in x_0, ottenendo:

$$y_1 = y_0 - \omega \frac{\epsilon f_2(x_1, y_0)}{f_2(x_1, y_0 + \epsilon) - f_2(x_1, y_0)}$$

4 Input e Output

I dati di input per risolvere il problema sono dunque:

- gli angoli δ, ψ, γ dati in gradi e da trasformare, quindi, in radianti;
- il fattore di rilassamento ω implementato nello schema della Regula Falsi;
- il numero massimo di iterazioni *itmax* e la tolleranza *tol* di controllo della convergenza dell'algoritmo;
- le approssimazioni iniziali x_0 e y_0;
- il parametro ϵ per il calcolo delle approssimazioni x_1 e y_1.

I dati di output saranno, invece:

- gli angoli x e y, opportunamente trasformati in gradi, primi e secondi;
- il valore assunto dalle funzioni f_1 e f_2 nella soluzione trovata;
- il numero di iterazioni effettuate a convergenza con lo schema della Regula Falsi.

5 Trasformazione degli angoli da gradi a radianti e viceversa

I dati in input e la soluzione trovata devono essere espressi in gradi (e questo perchè il sistema di unità di misura per gli angoli con cui si lavora abitualmente è dato in gradi).

La relazione che sussiste tra un angolo espresso in gradi (x°) e lo stesso espresso in radianti (x^r) (ricordiamo che la misura in radianti è utilizzata nel calcolo delle funzioni trigonometriche) è data da:

$$x^\circ : 180 = x^r : \pi$$

da cui:

$$x^r = x^\circ \frac{\pi}{180}$$

Il grado, tuttavia, ha come sottomisure anche i primi e i secondi: 1 grado è costituito da 60 primi, un primo da 60 secondi, per cui vale la relazione: (indichiamo con p' i primi e con s'' i secondi)

$$\begin{aligned} 1^\circ : 60' &= x^\circ : p' \\ x^\circ &= p'/60 \\ 1^\circ : 3600'' &= x^\circ : s'' \\ x^\circ &= s''/3600 \end{aligned}$$

Per passare dalla formulazione in gradi a quella in radianti, tenendo conto anche dei primi e dei secondi (avendo, quindi, un angolo scritto come $x^\circ\, p'\, s''$) si avrà, perciò, la relazione:

$$x^r = (x^\circ + \frac{p'}{60} + \frac{s''}{3600})\frac{\pi}{180}$$

Per passare dai radianti ai gradi si fa il passaggio inverso facendo particolare attenzione alla parte intera (funzione che indichiamo con $[\cdot]$) e alle parti decimali, che vanno convertite separatamente.

Andando a ritroso, si ha:

- $x^\circ = [x^r \frac{180}{\pi}]$ ci dà la parte intera (in gradi) dell'angolo. senza tener conto dei primi e dei secondi.
- Si considera quindi la differenza $d' = x^r \frac{180}{\pi} - x^\circ$.

  Allora $p' = [60d']$.
- Sia $d'' = 60d' - p'$

  Allora $s'' = [60d'']$. Per ragioni di arrotondamento ci conviene considerare la parte intera di $60d'' + 0.5$, cioè $s'' = [60d'' + 0.5]$.

Abbiamo in questo modo la conversione da radianti a gradi.

6 Prove numeriche

Una volta scritto e testato il codice che risolve il problema, bisogna trovare gli angoli x e y per alcune coppie di δ e ψ che devono essere scelti nell'intervallo di ammissibilità.

6.1 Cosa portare all'esame...

Nel seguito sono descritti i risultati **minimi** che saranno richiesti al momento dell'esame (naturalmente, se si vuole, si possono portare, in aggiunta a questi, ulteriori risultati).

Si considerino i seguenti valori per δ e ψ e per x_0 e y_0:

- **Prova n.1:**

  $\delta = 30°$, $\psi = 0°$;

  $x_0 = 0°$, $y_0 = 0°$.

- **Prova n.2:**

  $\delta = 30°$, $\psi = 0°$;

  $x_0 = \delta$, $y_0 = \psi$.

Le simulazioni devono essere eseguite facendo variare ω ($0 < \omega \leq 1$)in modo da trovare, sperimentalmente, quello ottimale. Si parta da $\omega = 0.2$ e si arrivi a $\omega = 1$ con incremento 0.2.

Per ciascuna delle due prove numeriche si faccia:

- un **grafico** che riporta i profili di convergenza per ogni valore di ω utilizzato. Il grafico deve essere in scala semilogaritmica: l'asse delle ascisse deve riportare il numero di iterazioni effettuate per arrivare a convergenza con lo schema della Regula Falsi e l'asse delle ordinate deve riportare il valore assoluto degli scarti degli angoli x_k e y_k rispettivamente.

- un **grafico** che riporta il diverso numero di iterazioni richieste per arrivare a convergenza al variare del parametro ω.

I grafici devono essere inseriti in una **relazione** scritta che commenta il problema assegnato e i risultati ottenuti.

Si alleghi, inoltre, il **listato completo del codice** scritto per risolvere il problema assegnato.

All'esame non sono ammessi grafici, relazioni e codici fotocopiati. Tutto il materiale deve essere portato in originale.