Topologia della matrice di rigidezza

$\boxed{\text{Eq. differenziale lineare e stazionaria}} \Rightarrow$

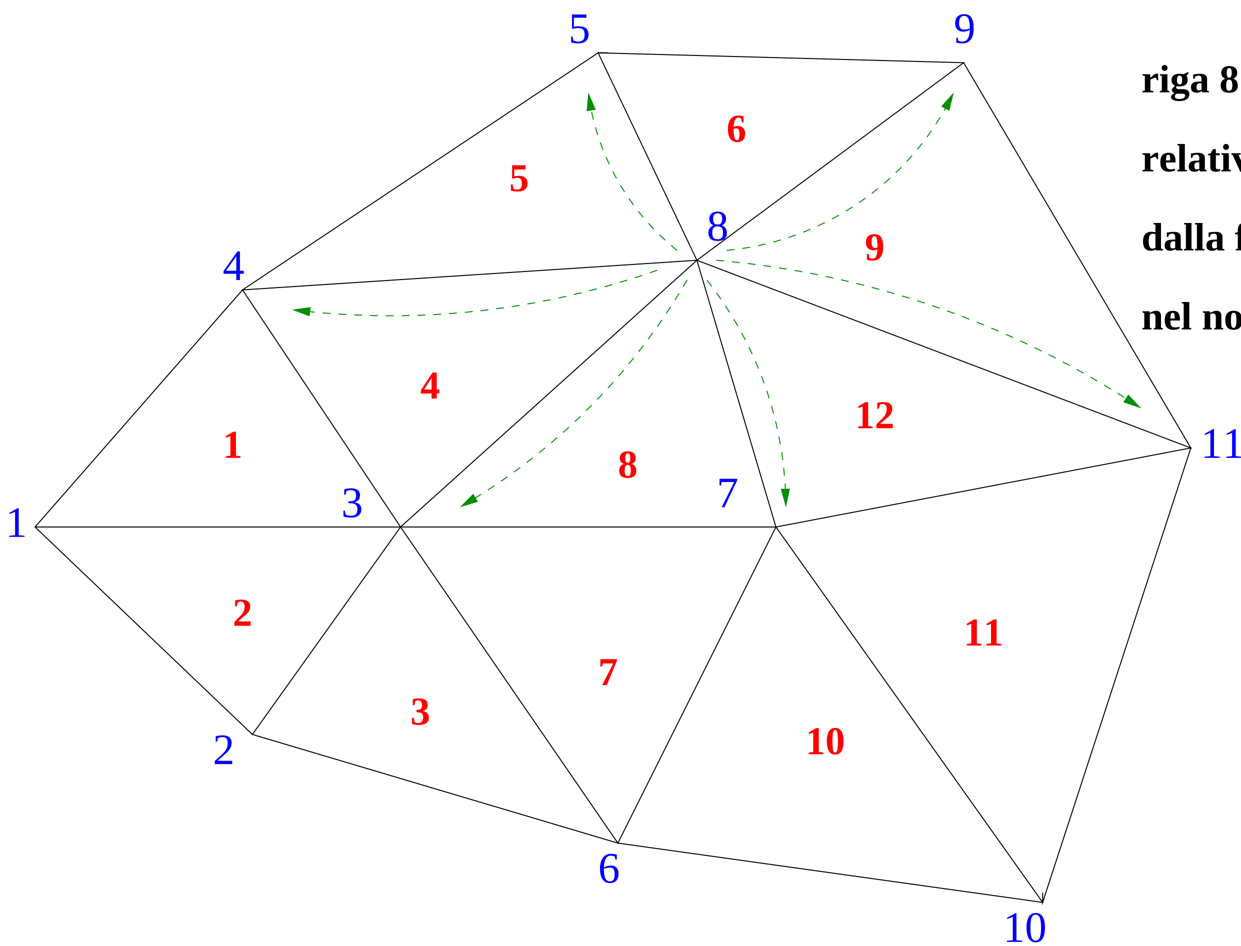
$\boxed{\text{Metodo agli Elementi Finiti}} \Rightarrow \boxed{\text{Sistema lineare}}$

La matrice del sistema viene chiamata *matrice di rigidezza* H.

La soluzione del sistema rappresenta il vettore dei valori che la funzione incognita assume sui nodi con i quali è stato discretizzato il dominio di integrazione.

La topologia della matrice di rigidezza, cioè l'ubicazione dei coefficienti non nulli in H, descritta nella memorizzazione compatta CRS dai vettori interi `JA` e `IA`, è determinata univocamente dalla mesh di calcolo con cui si è discretizzato il dominio di interesse e tenendo conto del fatto che i polinomi che interpolano la soluzione approssimata in ciascun elemento finito (in ciascun triangolo) hanno supporto locale.

Quindi la rete dei contatti nodali nella griglia computazionale stabilisce la posizione degli elementi non nulli di H. Gli elementi non nulli della riga i corrispondono infatti agli indici di colonna j dei nodi con cui i risulta in contatto.



riga 8 della matrice H

relativa al valore assunto

dalla funzione incognita

nel nodo 8:

elementi non nulli

$H_{8,3}$

$H_{8,4}$

$H_{8,5}$

$H_{8,7}$

$H_{8,8}$

$H_{8,9}$

$H_{8,11}$

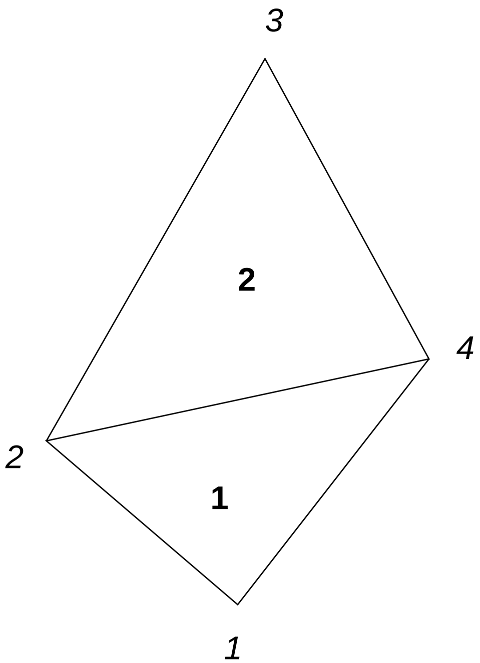
È ovvio che se il nodo i è in contatto con il nodo j, anche j sarà in contatto con i, e quindi la matrice H avrà una topologia simmetrica.

Osserviamo che la simmetria della topologia non implica necessariamente la simmetria di H.

Nel problema che noi svilupperemo, la simmetria è invece assicurata dalla forma dei contributi locali. Risulta pertanto sufficiente memorizzare le posizioni $h_{i,j}$ per cui $j \geq i$.

Costruzione dei vettori `JA` e `IA`

Abbiamo bisogno di conoscere come è fatta la griglia su cui stiamo operando. Per esempio, dal file `meshxytria.out` generato come output dal codice `griglia.f`, ricaviamo: il numero dei nodi n, il numero degli elementi (triangoli) della griglia ne, la successione dei nodi in senso antiorario per ciascun elemento, e le coordinate nodali.




```
4, 2
2 1 4
4 3 2
```

$x_1 \quad y_1$

$x_2 \quad y_2$

$x_3 \quad y_3$

$x_4 \quad y_4$

La struttura della matrice di rigidezza sarà la seguente:

$$\begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & 0 & h_{1,4} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} & h_{2,4} \\ 0 & h_{3,2} & h_{3,3} & h_{3,4} \\ h_{4,1} & h_{4,2} & h_{4,3} & h_{4,4} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} nt = 9 \\ \texttt{JA} = 1\;\;2\;\;4\;\;2\;\;3\;\;4\;\;3\;\;4\;\;4 \\ \texttt{IA} = 1\;\;4\;\;7\;\;9\;\;10 \end{array}$$

Procedura per la costruzione di JA

Definiamo $n1$ come il massimo numero di contatti nodali ammessi dalla griglia del problema, cioè il massimo numero di elementi non nulli che possiamo trovare su ciascuna riga di H. Nel caso della griglia di 2 triangoli, $n1 = 4$. Quindi il massimo numero di elementi non nulli da memorizzare sarà $nt = n1 \cdot n = 16$.

Pensiamo il vettore JA come un insieme di n celle (le n righe di H) di $n1$ componenti ciascuna. In esse andranno inseriti gli indici di colonna degli elementi non nulli incontrati in ciascuna riga:

0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0

Il primo elemento di ogni cella corrisponde all'elemento diagonale, per cui indice di colonna j = indice di riga i.

Quindi la prima componente di ogni cella deve essere pari all'indice della cella stessa:

1 0 0 0	2 0 0 0	3 0 0 0	4 0 0 0

Per determinare i vari contatti nodali si esegue un ciclo sugli elementi della griglia di calcolo. Si consideri il triangolo **1** definito dalla successione di nodi *2, 1, 4*. Poiché nella cella i vanno inseriti solamente i contatti nodali relativi alla parte triangolare alta di H, cioè gli indici j tali che $j \geq i$, conviene ordinare gli indici dei nodi in senso crescente:

$$2 \;\; 1 \;\; 4 \quad \Rightarrow \quad 1 \;\; 2 \;\; 4$$

Osserviamo che tale successione ordinata è utile solo ai fini della determinazione della topologia di H, mentre per il calcolo dei contributi locali va mantenuta la successione originaria in senso antiorario.

È consigliabile, pertanto, fare uso di un vettore ausiliario locale `I1`(3) in cui memorizzare provvisoriamente la sequenza nodale ordinata in senso crescente. Nel nostro caso `I1` $= 1\ \ 2\ \ 4$. Con un ciclo sulle componenti di `I1` si vede che nella prima cella vanno aggiunti i contatti nodali 2 e 4, nella seconda va aggiunto il contatto 4 e nella quarta non va aggiunto nulla:

1 2 4 0	2 4 0 0	3 0 0 0	4 0 0 0

Si opera poi sul triangolo **2**.

In tal caso il vettore `I1` diventa `I1` $= 2\ \ 3\ \ 4$.

Nella seconda cella vanno aggiunti i contatti ai nodi 3 e 4. A causa del modo in cui vengono memorizzati gli indici di colonna in JA, l'intero 3 va inserito fra il 2 ed il 4 già presenti, spostando quindi l'ultimo indice avanti di una posizione. Inoltre, poiché il contatto con il nodo 4 è già stato individuato, null'altro va aggiunto alla seconda cella. Infine, nella terza cella va introdotto il contatto con il nodo 4:

1 2 4 0	2 3 4 0	3 4 0 0	4 0 0 0

Osserviamo che nell'ultima cella non andrà mai aggiunto nessun contatto (c'è solo l'elemento diagonale).

Il vettore così determinato corrisponde, a meno degli zeri, al vettore JA cercato.

001 $nt := n1 \cdot n$
002 **Per** $i = 1, nt$
003 $\mathsf{JA}(i) := 0$
004 **Fine Per**
005 **Per** $i = 1, nt$ con passo $n1$
006 $\mathsf{JA}(i) := (i + n1 - 1)\,/n1$
007 **Fine Per**
008 **Per** $k = 1, ne$
009 ordinamento crescente nodi in $\mathtt{I1}(3)$
010 **Per** $j = 1, 2$
011 $m := (\mathtt{I1}(j) - 1) \cdot n1 + 1$
012 **Per** $i = j + 1, 3$
013 $m := m + 1$
014 **Se** $\mathsf{JA}(m) = 0$
015 $\mathsf{JA}(m) := \mathtt{I1}(i)$
016 vai all'istr. 030
017 **Fine Se**
018 **Se** $\mathsf{JA}(m) < \mathtt{I1}(i)$
019 vai all'istr. 013
020 **Fine Se**
021 **Se** $\mathsf{JA}(m) > \mathtt{I1}(i)$
022 sposta gli elem. della cella una pos.
in avanti

```
023                 controlla che la pos. dell'ultimo
elem. sia < n1 · I1(i)
024                     JA(m) := I1(i)
025                     vai all'istr. 030
026                 Fine Se
027                 Se JA(m) = I1(i)
028                     vai all'istr. 030
029                 Fine Se
030                 continua
031             Fine Per
032         Fine Per
033     Fine Per
```

Ricordiamo che con questo algoritmo non abbiamo ancora eliminato gli elementi nulli nel vettore che abbiamo costruito. Da qui possiamo ora passare al vettore `IA`: la posizione dell'elemento diagonale della riga i corrisponde, infatti, al primo elemento della cella i in `JA`, vale a dire $(i-1) \cdot n1 + 1$. Il valore così determinato va quindi depurato del numero di zeri rimasti nelle celle precedenti. Il corrispondente algoritmo può pertanto essere scritto nel modo seguente:

```
IA(1):=1
Per i = 1, nt con passo n1
    m := 0
    Per j = 1, n1
        Se JA(i + j − 1) ≠ 0
            m := m + 1
        Fine Se
    Fine Per
    k := (i + n1 − 1)/n1 + 1
    IA(k) := IA(k − 1) + m
Fine Per
```

A questo punto compattiamo il vettore JA eliminando tutti gli zeri in esso contenuti: facciamo scorrere le componenti di JA e, quando si incontra una componente nulla, spostiamo tutte le successive indietro di una posizione. Il numero di termini non nulli di JA, che alla fine della procedura sono raggruppati nelle prime posizioni, è il vero nt. Per far ciò in modo efficiente conviene, mano a mano che si scorrono le componenti di JA, contare i termini non nulli e spostare l'm-esimo termine diverso da zero in posizione m.

```
m := 0
Per i = 1, nt
    Se JA(i) ≠ 0
        m := m + 1
        JA(m) := JA(i)
    Fine Se
Fine Per
nt := m
```

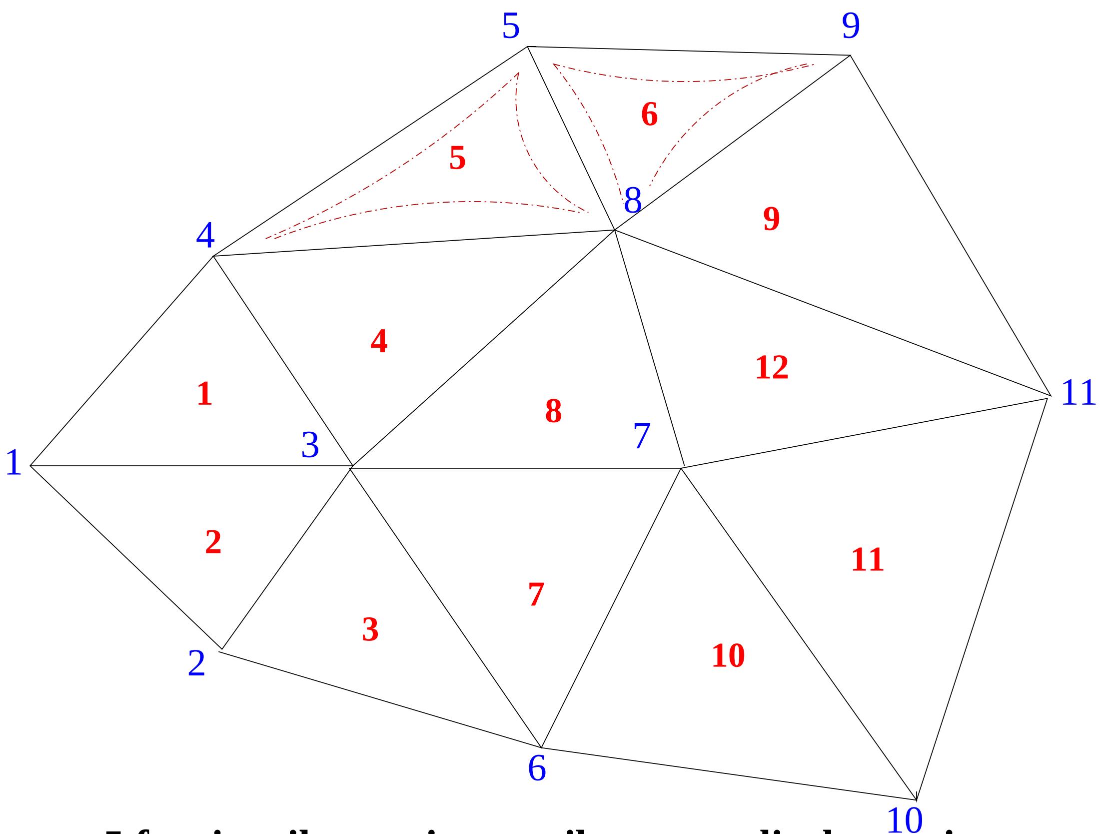
Poiché sappiamo che IA$(n+1)$ deve essere uguale a $nt+1$, ma i due termini sono stati calcolati indipendentemente uno dall'altro, è consigliabile verificare che tale condizione sia stata rispettata.

Un'implementazione efficiente di questi algoritmi è nella subroutine `TOPOL.F`.

Assemblaggio della matrice di rigidezza

A questo punto, noi sappiamo ricavare gli indici di riga e di colonna della matrice H in cui trovare gli elementi non nulli della matrice stessa.

Il vettore dei coefficienti non nulli della matrice H, cioè il vettore `SYSMAT` si ottiene mediante un processo di assemblaggio dei contributi locali calcolati su ciascun elemento finito:



L'elemento 5 fornisce il proprio contributo per gli elementi

$H_{4,4}$ $H_{4,5}$ $H_{4,8}$ $H_{5,5}$ $H_{5,8}$ $H_{8,8}$

L'elemento 6 invece a

$H_{5,5}$ $H_{5,8}$ $H_{5,9}$ $H_{8,8}$ $H_{8,9}$ $H_{9,9}$

A loro volta gli elementi 4, 8, 9 e 12 forniranno il loro contributo per $H_{8,8}$

... e cosi' via...

L'elemento $H_{i,j}$ viene creato mediante il contributo di ciascun elemento finito:

$$H_{i,j} = \sum_e H_{i,j}^{(e)}$$

$H_{i,j}^{(e)}$ è il contributo dell'elemento finito e.

La matrice locale $H^{(e)}$ ha dimensione $n^{(e)} \times n^{(e)}$, dove $n^{(e)}$ è il numero di nodi individuati nell'elemento finito prescelto. Ad esempio, con una griglia triangolare la matrice di rigidezza locale $H^{(e)}$ ha dimensione 3×3.

Per ciascun elemento finito, noi considereremo una numerazione locale dei nodi che compongono l'elemento e una numerazione globale (gli indici globali dei nodi)

Esempio sull'elemento **5** dato dai nodi 4, 8, 5.

Il primo nodo è il nodo 4. Il secondo nodo è il nodo 8. Il terzo nodo è il nodo 5.

La matrice di rigidezza locale $H^{(5)}$ si collega ai nodi globali secondo il seguente schema:

$$\begin{array}{c|ccc} & 4 & 8 & 5 \\ \hline 4 & h_{1,1}^{(5)} & h_{1,2}^{(5)} & h_{1,3}^{(5)} \\ 8 & h_{2,1}^{(5)} & h_{2,2}^{(5)} & h_{2,3}^{(5)} \\ 5 & h_{3,1}^{(5)} & h_{3,2}^{(5)} & h_{3,3}^{(5)} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} & 4 & 8 & 5 \\ \hline 4 & h_{4,4} & h_{4,8} & h_{4,5} \\ 8 & h_{8,4} & h_{8,8} & h_{8,5} \\ 5 & h_{5,4} & h_{5,8} & h_{5,5} \end{array}$$

A causa della simmetria di H, vengono memorizzati solo gli elementi relativi alla parte triangolare alta della matrice globale, per cui del contributo locale dato dal triangolo **5** prenderemo solo gli elementi diagonali e quelli relativi a $h_{4,5}$, $h_{4,8}$ ed $h_{5,8}$.

Per calcolare i termini globali della matrice H dobbiamo sommare tutti i contributi locali che concorrono allo stesso nodo. Per l'assemblaggio del termini $h_{8,8}$ dobbiamo sommare i contributi locali dati da tutti gli elementi che hanno il nodo 8 in comune, quindi i triangoli **4, 5, 6, 8, 9, 12**.

La successione dei nodi è:

...			
triangolo 4	4	3	8
triangolo 5	4	8	5
triangolo 6	5	8	9
...			
triangolo 8	8	3	7
triangolo 9	8	11	9
...			
triangolo 12	8	7	11

L'elemento globale $h_{8,8}$ risulterà pertanto:

$$h_{8,8} = h_{3,3}^{(4)} + h_{2,2}^{(5)} + h_{2,2}^{(6)} + h_{1,1}^{(8)} + h_{1,1}^{(9)} + h_{1,1}^{(12)}$$

L'elemento extradiagonale $h_{5,8}$ riceverà invece un contributo solo dai triangoli **5** e **6** che hanno in comune il lato definito dai nodi 5 e 8. E si avrà:

$$h_{5,8} = h_{3,2}^{(5)} + h_{1,2}^{(6)}$$

La matrice TRIJA

A complicare un po' le cose è la memorizzazione in forma compatta della matrice H, tramite i vettori SYSMAT, JA, IA. L'elemento globale $h_{i,j}$ va, infatti, sempre cercato nel vettore SYSMAT a partire dalla posizione IA(i) attraverso lo scorrimento delle componenti di JA. Per facilitare tale operazione, si può definire una matrice tridimensionale di puntatori denominata TRIJA.

La matrice tridimensionale TRIJA è un insieme di matrici 3×3 generate per ciascun elemento triangolare: TRIJA$(i, j, k) = ind$ individua l'indice ind in cui bisogna porre in SYSMAT il contributo locale $h_{i,j}^{(k)}$ dell'elemento k.

$h_{i,j}^{(k)}$ - contributo locale - andrà sommato in $\texttt{SYSMAT}(ind)$ cioè in $h_{\bar{i},\bar{j}}$, dove $\texttt{JA}(ind) = \bar{j}$ e $\bar{i}$ tale che $\texttt{IA}(\bar{i}) \leq ind \leq \texttt{IA}(\bar{i}+1) - 1$.

Vediamo per il caso della griglia di 2 triangoli, come si determina la matrice `TRIJA` relativa all'elemento **2**. Data la successione dei nodi *4,3,2*, il contributo locale alla matrice di rigidezza possiede la seguente struttura:

	4	3	2
4	$h_{1,1}^{(2)}$	$h_{1,2}^{(2)}$	$h_{1,3}^{(2)}$
3	$h_{2,1}^{(2)}$	$h_{2,2}^{(2)}$	$h_{2,3}^{(2)}$
2	$h_{3,1}^{(2)}$	$h_{3,2}^{(2)}$	$h_{3,3}^{(2)}$

Dobbiamo memorizzare solo gli elementi della parte alta, cioè solo i termini per cui, detti ii e jj gli indici globali dei nodi, vale $jj \geq ii$.

Nel nostro caso:

	4	3	2
4	$h_{1,1}^{(2)}$		
3	$h_{2,1}^{(2)}$	$h_{2,2}^{(2)}$	
2	$h_{3,1}^{(2)}$	$h_{3,2}^{(2)}$	$h_{3,3}^{(2)}$

L'elemento $h_{1,1}^{(2)}$ contribuisce all'elemento diagonale della matrice globale $h_{4,4}$. a posizione ind in SYSMAT di tale elemento è individuata da $\mathtt{IA}(ii)$, vale a dire 9 nel caso in esame.

Ricordiamo, per questo esempio:

$$\mathtt{JA} = 1 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 4$$

$$\mathtt{IA} = 1 \;\; 4 \;\; 7 \;\; 9 \;\; 10$$

L'elemento $h_{2,1}^{(2)}$ contribuisce, invece, al termine globale $h_{3,4}$, la cui posizione ind in `SYSMAT` è determinata partendo da `IA`(3) e scorrendo `JA` fintantoché si trova l'indice 4. Nel caso in esame, quindi, l'elemento corrispondente in `TRIJA` è 8. Proseguendo in questo modo per gli altri contributi locali, si trova `TRIJA`$(i, j, 2)$:

$$\begin{array}{ccc} 9 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{array}$$

```
001  Per k = 1, ne
002      trasferimento nodi dell'el. k in I2(3)
003      Per i = 1, 3
004          ii := I2(i)
005          Per j = 1, 3
006              jj := I2(j)
007              TRIJA(i, j, k) := 0
008              Se jj ≥ ii
009                  ind := IA(ii)
010                  Se JA(ind) = jj
011                      TRIJA(i, j, k) := ind
012                  Altrimenti
013                      ind := ind + 1
014                      vai all'istr. 010
015                  Fine Se
016              Fine Se
017          Fine Per
018      Fine Per
019  Fine Per
```

Equivalentemente

Per $k = 1, ne$
trasferimento nodi dell'el. k in $\mathtt{I2}(3)$
Per $i = 1, 3$
$ii := \mathtt{I2}(i)$
Per $j = 1, 3$
$jj := \mathtt{I2}(j)$
$\mathtt{TRIJA}(i, j, k) := 0$
Se $jj \geq ii$
$ind := \mathtt{IA}(ii)$
Fino a quando $\mathtt{JA}(ind) \neq jj$
$ind = ind + 1$
Fine Fino a quando
Se $\mathtt{JA}(ind) = jj$
$\mathtt{TRIJA}(i, j, k) := ind$
Fine Se
Fine Se
Fine Per
Fine Per
Fine Per