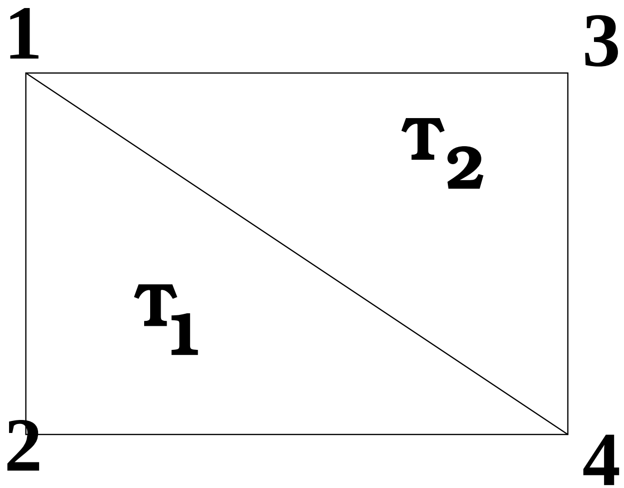
Elementi conformi

Partiamo dal considerare elementi finiti triangolari in un semplice dominio costituito da due triangoli



Le coordinate dei punti sono

Punto	Coordinate
1	(0,1)
2	(0, 0)
3	(2,1)
4	(2,0)

Quindi il primo triangolo è individuato dai nodi 1, 2 e 4 mentre il secondo triangolo è individuato dai nodi 1, 4 e 3. Di conseguenza, localmente, la rappresentazione del nostro problema alle derivate parziale sarà così espresso:
sul primo triangolo $u^1(x,y) = u_1\xi_1^1(x,y) + u_2\xi_2^1(x,y) + u_4\xi_3^1(x,y)$
sul secondo triangolo $u^2(x,y) = u_1\xi_1^2(x,y) + u_4\xi_2^2(x,y) + u_3\xi_3^2(x,y)$.

Se andiamo a calcolare le funzioni di base su ogni triangolo, la formulazione finale sarà:
sul primo triangolo $u^1(x,y) = u_1 y + u_2 \dfrac{2-x-2y}{2} + u_4 \dfrac{x}{2}$
sul secondo triangolo
$u^2(x,y) = u_1 \dfrac{2-x}{2} + u_4(1-y) + u_3 \dfrac{-2+x+2y}{2}$.
Cosa succede sul lato comune ai due triangoli? (nel caso particolare il lato che congiunge i nodi 1 e 4).

Un punto che appartiene a questo lato, può essere visto come facente parte del segmento congiungente i due nodi 1 e 4, per cui $y = 1 - x/2$ per $x \in [0,2]$.

Andiamo a sostituire in u^1 e u^2 e otteniamo - dopo aver fatto tutti i passaggi :
$u^1(x,y) = u_1(1-x/2) + u_4 \dfrac{x}{2}$ $\qquad$ $u^2(x,y) = u_1(1-x/2) + u_4 \dfrac{x}{2}$

Quindi abbiamo la stessa rappresentazione sul lato comune: c’ è continuità della soluzione sulla frontiera degli elementi contigui. L’elemento si dice **conforme**.

Elementi finiti non conformi

Gli elementi si dicono **non conformi** quando su ciascun elemento finito le funzioni di base sono date da polinomi di grado m e le derivate di ordine $m-1$ della rappresentazione presentano discontinuità sulla frontiera degli elementi contigui.

Nel caso precedente, abbiamo polinomi di primo grado, perciò siamo andati a vedere la continuità della rappresentazione stessa (e non delle derivate) sulla frontiera.

Se definissimo polinomi di interpolazione lineari che violassero la continuità della rappresentazione sui lati dei triangoli, avremmo elementi finiti non conformi.

Patch test

Il metodo agli elementi finiti che usa elementi non conformi può convergere ugualmente.

Per vedere ciò si utilizza il cosiddetto **patch test**: sia r l'ordine massimo di derivata nel funzionale; le funzioni base per gli elementi non conformi siano costituite da polinomi di grado r; si scelga una soluzione esatta u (il nostro caso test) data da un polinomio di grado r su un insieme di elementi (il patch), imponendo le condizioni al contorno coerenti con la soluzione esatta.

Si applica poi il metodo di Ritz: se la soluzione, sugli elementi del patch, coincide esattamente con la soluzione prescelta, allora il patch test è positivo - il che vuol dire che il metodo agli elementi finiti converge su questi elementi non conformi.

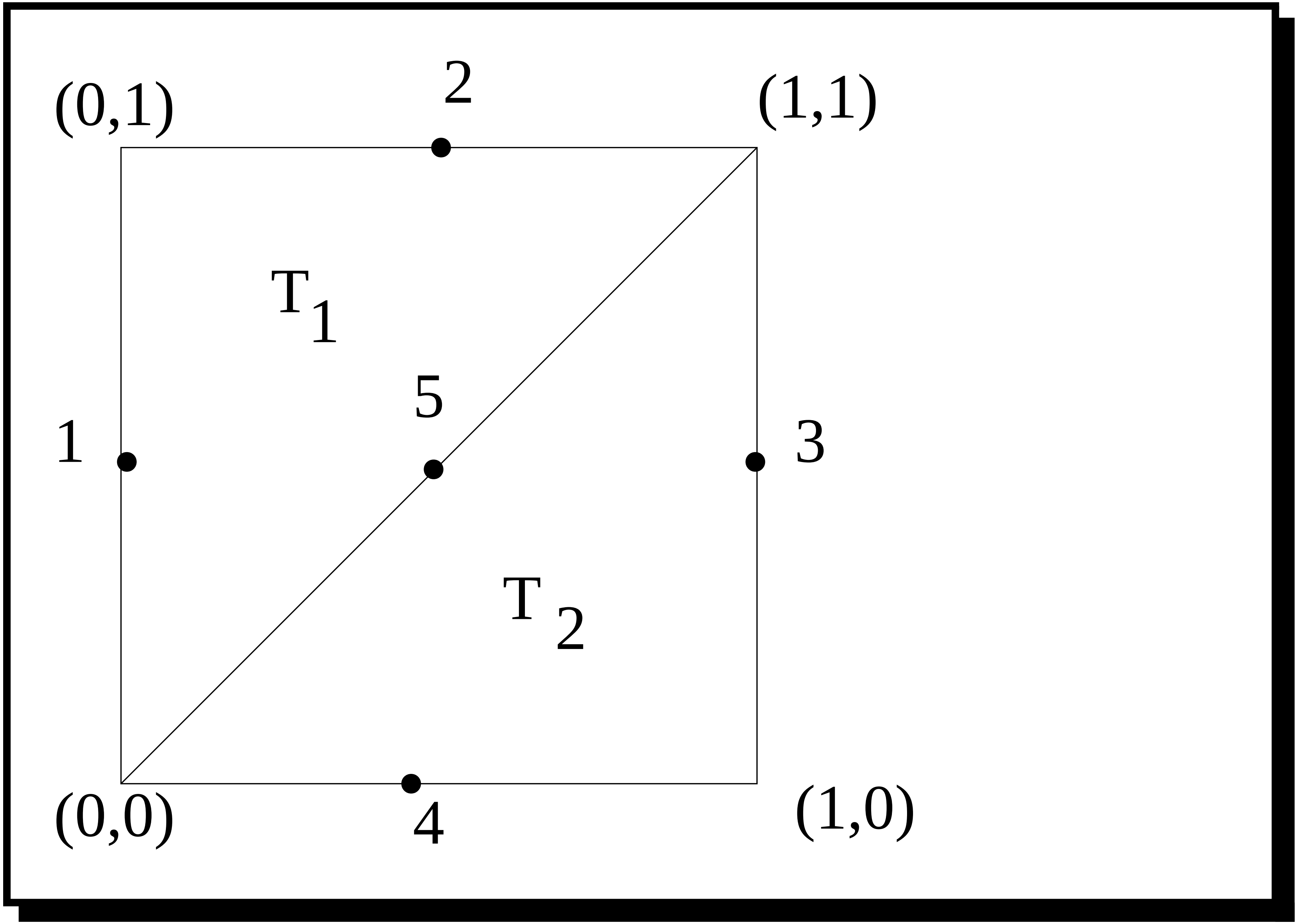
Esempio di applicazione del patch test

Consideriamo l'equazione di Laplace

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = 0$$

cui associamo il funzionale quadratico

$$\Omega(u) = \iint_R \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \mathbf{d}x \; \mathbf{d}y$$


2
(0,1)
(1,1)
T_1
5
1
3
T_2
(0,0)
4
(1,0)

Il funzionale Ω contiene solo derivate del primo ordine, quindi l'ordine massimo di derivata vale $r = 1$. In ciascun elemento non conforme (triangolo) prendiamo per u una rappresentazione lineare ($r = 1$). Ora però vogliamo rappresentare la soluzione non sui vertici dei triangoli (come facciamo di solito) ma sui punti medi di ogni lato (i nodi 1, 2, 3, 4 e 5).

Le due approssimazioni su T_1 e T_2 sono:

sul primo triangolo
$u^1(x,y) = (1-2x)u_1 - (1-2y)u_2 + (1+2x-2y)u_5$
sul secondo triangolo
$u^2(x,y) = (-1+2x)u_3 + (1-2y)u_4 + (1-2x+2y)u_5$

Lungo il lato comune ai due triangoli (il segmento congiungente i punti di coordinate $(0,0)$ e $(1,1)$, le due rappresentazioni non assumono lo stesso valore (tranne che nel nodo 5). Perciò abbiamo elementi non conformi.

Fissiamo la seguente soluzione per il nostro problema (di grado $r = 1$): $u = x + y$.

Questa funzione soddisfa l'equazione di Laplace. Sui nodi del contorno assume i valori $u_1 = u_4 = 0.5$ e $u_2 = u_3 = 1.5$. Imponendo le condizioni al contorno - cioè imponendo che u^1 e u^2 assumano i valori della soluzione test sui nodi 1, 2, 3 e 4 - si ha:
$u^1(x,y) = -1 - x + 3y + (1 + 2x - 2y)u_5$
$u^2(x,y) = -1 + 3x - y + (1 - 2x + 2y)u_5$

La soluzione approssimiata che andiamo cercando è data da $\tilde{u} = u^1$ su T_1 e da $\tilde{u} = u^2$ su T_2. Andiamo a sostituire la $\tilde{u}$ nel funzionale che dobbiamo minimizzare - Ω - funzionale dato sull'unione T dei due triangoli T_1 e T_2:

$$\begin{aligned}\Omega(u) &= \iint_T \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\right)^2\right] \mathbf{d}x \ \mathbf{d}y = \\ &= \iint_{T_1} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u^1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^1}{\partial y}\right)^2\right] \mathbf{d}x \ \mathbf{d}y + \\ &\quad + \iint_{T_2} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^2}{\partial y}\right)^2\right] \mathbf{d}x \ \mathbf{d}y\end{aligned}$$

Andando a sostituire u^1 e u^2 e minimizzando si ricava $u_5 = 1$, che sostituito in u^1 e u^2 dà:

$$u^1(x, y) = u^2(x, y) = x + y = u$$

Infatti, abbiamo (sostituendo):

$$\Omega(u) = \iint_{T_1} \frac{1}{2} \left[(-1 + 2u_5)^2 + (3 - 2u_5)^2 \right] \, \mathbf{d}x \, \mathbf{d}y + \\ + \iint_{T_2} \frac{1}{2} \left[((3 - 2u_5)^2 + (-1 + 2u_5)^2 \right] \, \mathbf{d}x \, \mathbf{d}y$$

Considerato che abbiamo degli integrali che ora non dipendono da x e da y e che l'area dei triangoli vale $1/2$, si ha, facendo tutti i calcoli,
$\Omega(u) = 5 + 4(u_5)^2 - 8u_5$.
Il funzionale dipende solo da u_5: per minimizzarlo facciamo la derivata rispetto a u_5 e imponiamo che valga zero. Si ricava facilmente che u_5 deve valere 1.

Questo risultato si ricava anche aumentando il numero di elementi e ci porta a dire che gli elementi finiti triangolari non conformi superano il patch test e assicurano la convergenza.