Equazioni alle differenze

$$F(k, y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_{k+n}) = 0$$

- Le equazioni alle differenze sono l'equivalente, nel discreto, delle equazioni differenziali nel continuo.

- Un'equazione alle differenze porta ad una sequenza di numeri generata ricorsivamente usando una regola che lega ciascun numero della sequenza ai precedenti.

  – **Esempio: la sequenza di Fibonacci** I numeri $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ sono generati dalla regola: $y_{k+2} = y_{k+1} + y_k$ per $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ponendo $y_0 = y_1 = 1$. Queste eq. alle differenze è un esempio di eq. alle differenze lineare con coefficienti costanti

Eq. alle differenze lineari

Un eq. alle differenze si dice lineare quando F è lineare:

$$a_0(k)y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + \ldots + a_n(k)y_k = g(k)$$

- n è l'ordine dell'eq. alle differenze.
- Se le funzioni $a_i(k)$ sono costanti si ha un'eq. alle differenze a coefficienti costanti.

Come risolvere un'eq. alle differenze lineari

- Si cerca una soluzione che sia combinazione lineare di termini del tipo $y_k = \alpha^k$. Vediamo come.
- Sia $a_0 y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0$ (eq. alle differenze con termine noto nullo: **omogenea**)
- Si pone $y_k = \alpha^k \implies a_0\alpha^{k+2} + a_1\alpha^{k+1} + a_0\alpha^k = 0$
- Raccolgo α^k: $\implies \alpha^k(a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2) = 0$
- L'eq. $a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$ si dice **eq. caratteristica**.
- Nel nostro caso, risolviamo l'eq. trovando due radici α_1 e α_2.
- La soluzione dell'eq. alle differenze è

$$y_k = C_1\alpha_1^k + C_2\alpha_2^k$$

- C_1 e C_2 si determinano mediante le condizioni iniziali y_0 e y_1 assegnate:

$$\begin{cases} y_0 = C_1\alpha_1^0 + C_2\alpha_2^0 = C_1 + C_2 \\ y_1 = C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 \end{cases}$$

Il sistema ha come incognite C_1 e C_2 e può essere risolto.

Esempio

Riprendiamo la sequenza di Fibonacci: $y_{k+2} = y_{k+1} + y_k$.

- eq. caratteristica $\alpha^2 - \alpha_1 - 1 = 0$
- soluzioni dell'eq. caratteristica $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- soluzione dell'eq. alle differenze:
  $y_k = C_1(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^k + C_2(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^k$
- Da $y_0 = y_1 = 1$ ricaviamo $C_1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ e $C_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$
- Quindi $y_k = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^k + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^k$

Soluzioni complesse

Se $\alpha_1 = m + in$ e $\alpha_2 = m - in$ (soluzioni complesse e coniugate), la soluzione è sempre del tipo $y_k = C_1(m+in)^k + C_2(m-in)^k$ ma ci interessano soluzioni reali (e non complesse)! Perciò prendiamo $C_1 = a + ib$ e $C_2 = a - ib$.

Ricordiamo, inoltre, che se $z = m + in$ complesso, si ha $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ con $\rho = \sqrt{m^2+n^2}$.

Vale $z^k = (m+in)^k = \rho^k(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta))$

Allora:

$$
\begin{aligned}
y_k &= (a+ib)(m+in)^k + (a-ib)(m-in)^k \\
&= (a+ib)\rho^k(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) + (a-ib)\rho^k(\cos(k\theta) - i\sin(k\theta)) \\
&= \rho^k \{[a\cos(k\theta) + ia\sin(k\theta) + ib\cos(k\theta) - b\sin(k\theta)] + \\
&[a\cos(k\theta) - ia\sin(k\theta) - ib\cos(k\theta) - b\sin(k\theta)]\} \\
&= \rho^k [2a\cos(k\theta) - 2b\sin(k\theta)] \\
&= \rho^k [A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta)]
\end{aligned}
$$

Esempio

- Sia $y_{k+2} - 2y_{k+1} + 2y_k = 0$
- **Eq. caratteristica:** $\alpha^2 - 2\alpha + 2 = 0$
- **Radici dell'eq. :** $\alpha_1 = 1 + i$, $\alpha_2 = 1 - i$
- $\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- θ **tale che** $\cos\theta = 1$ **e** $\sin\theta = 1$ **è** $\theta = \pi/4$
- $y_k = (\sqrt{2})^k \left[A\cos(k\pi/4) + B\sin(k\pi/4)\right]$

Equazioni differenziali

- Le eq. alle differenze vengono usate nelle eq. differenziali.
- Ci riferiamo a ODE del primo ordine del tipo $y'(x) = f(x, y(x))$ con opportuna condizione iniziale, al tempo $x = 0$
- Sia h il passo di discretizzazione
- $x_k = x_{k-1} + h = x_0 + kh$
- $y'_k = f(x_k, y_k)$
- Per semplicità ci riferiamo all'eq. test $y' + y = 0$
- Quindi $y'_k + y_k = 0$

Schema esplicito

- Sviluppiamo con Taylor: $y_{k+1} = y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2}y''_k + \ldots\ldots$
- Esplicito $y'_k \Longrightarrow \; y'_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \frac{h}{2}y''_k + \ldots$
- Prendo i primi termini e trascuro gli altri: $y'_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$
- Sostituisco nell'eq. test:
  $\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + y_k = 0 \Longrightarrow y_{k+1} + (h-1)y_k = 0$
- Ho un'eq. alle differenze! Eq. caratteristica: $\alpha + (h-1) = 0 \Longrightarrow \alpha = 1 - h \Longrightarrow y_k = C(1-h)^k \Longrightarrow y_k = y_0(1-h)^k$

Questo scheme prende il nome di **Eulero esplicito**.

Schema implicito

- $y'_{k+1} + y_{k+1} = 0$
- Sviluppiamo con Taylor: $y_k = y_{k+1} - hy'_{k+1} + \frac{h^2}{2} y''_{k+1} + \ldots\ldots$
- Esplicito $y'_{k+1} \Longrightarrow\ y'_{k+1} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + \frac{h}{2} y''_{k+1} + \ldots$
- Prendo i primi termini e trascuro gli altri: $y'_{k+1} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$
- Sostituisco nell'eq. test:
$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + y_{k+1} = 0 \Longrightarrow (1+h)y_{k+1} - y_k = 0$
- Ho un'eq. alle differenze! Eq. caratteristica:
$(1+h)\alpha - 1 = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{1+h} \Longrightarrow y_k = C(\frac{1}{1+h})^k \Longrightarrow y_k = \frac{y_0}{(1+h)^k}$

Questo scheme prende il nome di **Eulero implicito**.

Schema di Crank-Nicolson

Si fa la media aritmetica delle formule di Eulero esplicito e implicito:

$$y_{k+1} - y_k = -hy_k$$

$$y_{k+1} - y_k = -hy_{k+1}$$

sommando e dividendo per 2:

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} - y_k &= -\frac{h}{2}[y_k + y_{k+1}] \\
y_{k+1} &= y_k - \frac{h}{2}[y_k + y_{k+1}] \\
(2+h)y_{k+1} + (h-2)y_k &= 0
\end{aligned}
$$

Eq. caratteristica: $(2+h)\alpha + (h-2) = 0 \Longrightarrow \alpha = \dfrac{2-h}{2+h}$

$y_k = y_0(\dfrac{2-h}{2+h})^k$

Ordine e passo dei metodi visti

- Eulero esplicito: primo ordine, 1 passo
- Eulero implicito: primo ordine, 1 passo
- Cranck-Nicolson: secondo ordine, 1 passo

Stabilità

Un metodo si dice stabile se l'errore iniziale si mantiene limitato al crescere di k

- Eulero esplicito: stabilità sotto condizione.
  Per l'errore si ha $\epsilon_k = \epsilon_0(1-h)^k$
  Condizione di stabilità $\Longrightarrow \; h \leq 2$
- Eulero implicito: stabilità incondizionata.
  Per l'errore si ha $\epsilon_k = \dfrac{\epsilon_0}{(1+h)^k}$
  Condizione di stabilità $\Longrightarrow \; h$ qualunque.
- Cranck-Nicolson: stabilità incondizionata.
  Per l'errore si ha $\epsilon_k = \epsilon_0(\dfrac{2-h}{2+h})^k$
  Condizione di stabilità $\Longrightarrow \; h$ qualunque.

Soluzioni spurie

Le soluzioni spurie possono indurre instabilità.

Esempio

- Sviluppo y_{k+2} tramite Taylor:

$$y_{k+2} = y_k + 2hy'_k + (2h)^2 \frac{y''_k}{2} + (2h)^3 \frac{y'''_k}{6} + \dots$$

- Sviluppo y_{k+1} tramite Taylor:

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k + (h)^2 \frac{y''_k}{2} + (h)^3 \frac{y'''_k}{6} + \dots$$

- Moltiplico per 4 la precedente eq.:

$$4y_{k+1} = 4y_k + 4hy'_k + 4(h)^2 \frac{y''_k}{2} + 4(h)^3 \frac{y'''_k}{6} + \dots$$

- Sottraggo la prima dalla seconda:

$$4y_{k+1} - y_{k+2} = 3y_k + 2hy'_k - 2(h)^3 \frac{y'''_k}{6} + \dots$$

- Isolo y'_k:

$$y'_k = \frac{4y_{k+1} - y_{k+2} - 3y_k}{2h} + (h)^2 \frac{y'''_k}{3} + \dots$$

- Il termine $(h)^2 \frac{y'''_k}{3}$ mi dice metodo di ordine 2.
- Sostituisco nell'eq. test:

$$\frac{4y_{k+1} - y_{k+2} - 3y_k}{2h} + y_k = 0$$

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + (3 - 2h)y_k = 0$$

- Eq. caratteristica: $\alpha^2 - 4\alpha + (3 - 2h) = 0$

- **Radici** $\alpha_1 = 2 - \sqrt{1+2h}$, $\alpha_2 = 2 + \sqrt{1+2h}$.
- $y_k = C_1(2 - \sqrt{1+2h})^k + C_2(2 + \sqrt{1+2h})^k$
- **Ora** $\lim_{h\to 0, k\to\infty}(2 - \sqrt{1+2h})^k = e^{-x}$ **(soluzione teorica di** $y' + y = 0$ **con** $y_0 = 1$**) (si applica l'Hopital).**
- **Invece** $\lim_{h\to 0, k\to\infty}(2 + \sqrt{1+2h})^k = \infty$ **questa si chiama soluzione spuria, che genera instabilità.**

Dettagli

- $x^\alpha = e^{\log x^\alpha} = e^{\alpha \log x}$
- **Per** $h \to 0$ **e** $k \to \infty$ **:**

$$\lim (2-\sqrt{1+2h})^k = \lim (2-\sqrt{1+2h})^{(kh)/h} =$$

$$\lim e^{kh \log (2-\sqrt{1+2h})^{1/h})}$$

$$= \lim e^{x \dfrac{\log (2-\sqrt{1+2h})^{1/h})}{h}}$$

- **Per $h \to 0$:**

$$
\begin{aligned}
\lim \frac{\log\left(2-\sqrt{1+2h}\right)^{1/h})}{h} &= \lim \frac{\frac{-1}{2-\sqrt{1+2h}}\frac{2}{2\sqrt{1+2h}}}{1} \\
&= \lim \frac{-1}{(2-\sqrt{1+2h})(\sqrt{1+2h})} = -1
\end{aligned}
$$

Teorema di Dalquist

Data una formula a k passi del tipo:

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + a_0 y_n = h(b_k f_{n+k} + b_{k-1} f_{n+k-1} + \ldots + b_0 f_n)$$

per risolvere $y' = f(x, y)$, con h passo di integrazione,

l'ordine massimo che si può avere è $2k$.

Se si vuole stabilità del metodo, allora l'ordine massimo è $k + 1$ se k è dispari e $k + 2$ se k è pari.