

Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Progetto numerico al calcolatore

Parte V

**Esercitazione numerica:
soluzione agli elementi finiti dell'equazione di Poisson**

Indice

1	Formulazione del problema	1
1.1	Deformazione di una membrana elastica	1
1.2	Filtrazione in un mezzo poroso	2
2	Soluzione agli elementi finiti	3
2.1	Metodo variazionale di Ritz	4
2.2	Metodo variazionale di Galerkin	4
3	Il codice di calcolo	5
3.1	Definizione della griglia computazionale	7
3.2	Calcolo della topologia della matrice di rigidezza	7
3.3	Calcolo della matrice dei puntatori	7
3.4	Calcolo e assemblaggio dei contributi locali	8
3.5	Calcolo del termine noto	10
3.6	Imposizione delle condizioni al contorno	11
3.7	Soluzione del sistema lineare	12
3.8	Calcolo della prima frequenza fondamentale	12
4	Applicazione del codice	14

1 Formulazione del problema

Si vuole risolvere numericamente l'equazione differenziale di Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 - 2x^2 - 2y^2 \quad (1)$$

in un dominio quadrangolare \mathcal{S} definito come:

$$\mathcal{S} = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

con le seguenti condizioni imposte sulle porzioni Γ_u e Γ_q del contorno Γ di \mathcal{S} :

$$u = 0 \quad \text{lungo} \quad \Gamma_u = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, y = \pm 1\} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = q = 2(1 - y^2) \quad \text{lungo} \quad \Gamma_q = \{(x, y) : x = \pm 1, -1 \leq y \leq 1\} \quad (3)$$

La soluzione analitica di questo *boundary value problem* è :

$$u(x, y) = x^2 + y^2 - x^2 y^2 - 1 \quad (4)$$

L'equazione (1) con le condizioni al contorno (2) e (3) viene risolta usando il metodo degli elementi finiti (FEM) con elementi triangolari e funzioni base lineari.

L'equazione ellittica di Poisson è associata a problemi stazionari e governa lo stato di equilibrio di diversi processi fisici. Fra i vari ambiti in cui l'equazione differenziale (1) può trovare applicazione, ne consideriamo due che evidenziano una certa attinenza con problematiche di tipo civile ed idraulico: lo studio dell'equilibrio elastico di una membrana sottile e l'andamento del potenziale idraulico nel flusso di un fluido omogeneo attraverso un mezzo poroso.

1.1 Deformazione di una membrana elastica

La deformazione di una membrana elastica sottile, di spessore costante, perfettamente flessibile, poggiata ed uniformemente tesa al contorno e caricata ortogonalmente da una pressione costante è governata dall'equazione differenziale:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad (5)$$

dove:

- u [L]: spostamento verticale dei punti della membrana;
- $f = p/h$, con p [F/L²] pressione esercitata ortogonalmente alla membrana, e h [F/L] tensione radiale esercitata al bordo.

Assumendo una tensione radiale h unitaria, l'equazione differenziale (1) definita in \mathcal{S} descrive lo spostamento verticale di una membrana flessibile soggetta ad una pressione ortogonale pari a $p =$

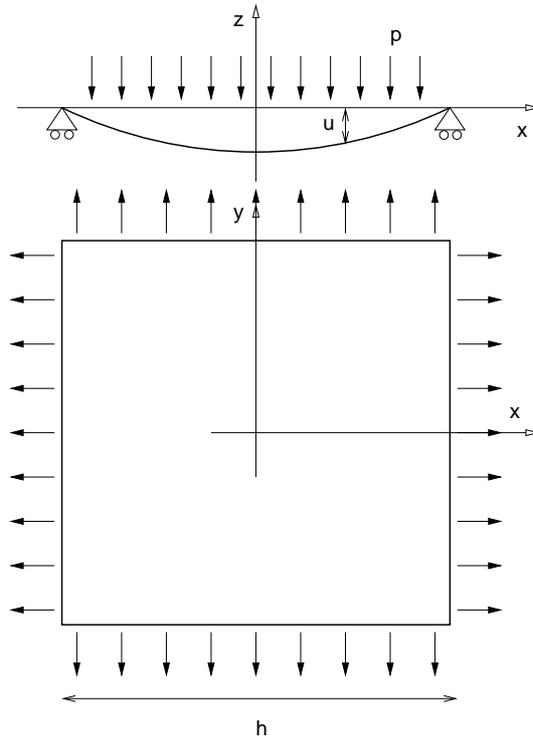


FIGURA 1: *Configurazione geometrica della membrana elastica.*

$4-2x^2-2y^2$. Le condizioni al contorno (2) e (3) individuano il modo in cui la membrana è vincolata al bordo. L'imposizione di uno spostamento verticale nullo lungo Γ_u corrisponde a prescrivere un vincolo di appoggio semplice, mentre le condizioni di Neumann lungo Γ_q si possono interpretare fisicamente come delle forze distribuite sulla frontiera. La derivata direzionale dello spostamento, infatti, rappresenta una deformazione che, in base alla teoria dell'elasticità, è proporzionale alla tensione secondo i parametri di deformabilità del materiale. Poiché la soluzione analitica (4) risulta nulla anche lungo Γ_q , le condizioni di Neumann corrispondono in sostanza alla reazione che avrebbero vincoli ad appoggio semplice collocati su tale bordo della membrana.

1.2 Filtrazione in un mezzo poroso

Il moto di filtrazione di un liquido in un mezzo poroso è descritto dall'equazione di Darcy:

$$\mathbf{v} = -K\nabla u \quad (6)$$

dove:

- \mathbf{v} [L/T]: vettore velocità di filtrazione;
- K [L/T]: coefficiente di filtrazione o conduttività idraulica;
- ∇ [L⁻¹]: operatore vettoriale di gradiente $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)^T$;

- u [L]: potenziale idraulico o quota piezometrica $\frac{\pi}{\gamma} + z$, con π [F/L²] pressione del liquido, γ [F/L³] peso specifico del liquido e z [L] la quota rispetto ad un piano di riferimento.

Nel caso più generale il mezzo poroso è da considerarsi non omogeneo ed anisotropo. Il coefficiente di filtrazione diventa perciò un tensore funzione della posizione:

$$K = \begin{bmatrix} k_{xx}(x, y) & k_{xy}(x, y) \\ k_{yx}(x, y) & k_{yy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Se l'acquifero ha profondità fissa e spessore costante pari a B , il moto risulta bidimensionale in un piano orizzontale e si può definire un tensore di *trasmisività* dell'acquifero $T = B \cdot K$ anch'esso costante. Dal principio di conservazione della massa applicato ad un volume infinitesimo del mezzo poroso si ricava l'equazione generale del moto di filtrazione in un acquifero in pressione:

$$\nabla \cdot T \nabla u = f(x, y) \quad (8)$$

Affinché il problema sia determinato, alla (8) vanno aggiunte le condizioni al contorno di Dirichlet o di Neumann:

$$u = \bar{u} \quad \text{lungo } \Gamma_u \quad (9)$$

$$q = T \nabla u \cdot \mathbf{n} = q_n \quad \text{lungo } \Gamma_q \quad (10)$$

in cui le prime assegnano il potenziale lungo la porzione Γ_u della frontiera del dominio, mentre le seconde impongono un flusso specifico normale al boundary Γ_q .

Il problema differenziale (1) descrive pertanto l'andamento del potenziale idraulico del flusso stazionario di un fluido in un mezzo poroso omogeneo, isotropo e con trasmissività unitaria. La forzante del sistema è costituita da una ricarica distribuita $f(x, y) = 4 - 2x^2 - 2y^2$, mentre le condizioni al contorno (2) e (3) impongono potenziale nullo lungo Γ_u ed una portata specifica uscente dall'ammasso filtrante lungo Γ_q .

2 Soluzione agli elementi finiti

L'operatore differenziale ellittico dell'equazione di Poisson è auto-aggiunto e definito negativo. Tale condizione garantisce l'esistenza di un principio variazionale la cui equazione di Eulero è la (1). La soluzione numerica del problema considerato può quindi essere ottenuta mediante la minimizzazione approssimata con il metodo variazionale di Ritz del funzionale associato alla (1) con condizioni al contorno (2) e (3).

La soluzione numerica cercata può essere ottenuta anche annullando gli integrali variazionali di Galerkin con una procedura più generale che può essere adottata anche se l'operatore differenziale del problema considerato non fosse auto-aggiunto e definito negativo, senza, cioè, la garanzia teorica di poter definire un principio variazionale associato al problema in esame. In questo caso,

tuttavia, la simmetria dell'operatore differenziale di Laplace assicura che il metodo variazionale di Ritz e di Galerkin conducono esattamente allo stesso sistema algebrico di equazioni, come viene verificato nei seguenti paragrafi.

2.1 Metodo variazionale di Ritz

Il funzionale associato all'equazione (1), modificato per tener conto delle condizioni al contorno non omogenee (3), si scrive:

$$\Omega(u) = \iint_S \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + fu \right\} dS - \int_{\Gamma_q} qu \, d\Gamma \quad (11)$$

Esso deve essere minimizzato sul dominio quadrangolare \mathcal{S} soggetto alla condizione al contorno (2). Si scriva la soluzione approssimata \hat{u} come:

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i(x, y) \quad (12)$$

dove $\xi_i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$ sono opportune funzioni di forma o funzioni base ed u_i corrispondono ai valori puntuali assunti da u su n punti del dominio \mathcal{S} (incognite del problema). Sostituendo \hat{u} in (11) ed annullando le derivate di $\Omega(\hat{u})$ rispetto ai coefficienti u_i al fine di determinare la soluzione approssimata che minimizza il funzionale si ottiene:

$$\frac{\partial \Omega(\hat{u})}{\partial u_i} = \iint_S \left[\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \right) + f \xi_i \right] dS - \int_{\Gamma_q} q \xi_i \, d\Gamma = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$$

Sostituendo in (13) l'espressione (12) di \hat{u} si ha:

$$\iint_S \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi_j}{\partial y} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \right) u_j + f \xi_i \right] dS - \int_{\Gamma_q} q \xi_i \, d\Gamma = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (14)$$

Le (14) costituiscono un sistema di n equazioni nelle n incognite u_1, u_2, \dots, u_n :

$$H\mathbf{u} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (15)$$

Il sistema (15) possiede un'infinità di soluzioni e per renderlo determinato occorre imporre la condizione al contorno (2).

2.2 Metodo variazionale di Galerkin

Si scriva la soluzione approssimata \hat{u} come in (12). Sostituendo \hat{u} in (8) si ottiene l'espressione del residuo:

$$L(\hat{u}) = \nabla \cdot T \nabla \hat{u} - f \quad (16)$$

ed imponendone l'ortogonalità alle n funzioni base $\xi_i(x, y)$ si ha:

$$\iint_S L(\hat{u}) \xi_i(x, y) dS = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (17)$$

L'applicazione alla (17) della prima identità di Green, nell'ipotesi di assi coordinati x e y paralleli alle direzioni principali di anisotropia, produce:

$$\iint_S \left(T_{xx} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + T_{yy} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \right) dS - \int_{\Gamma} \left(T_{xx} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} n_x + T_{yy} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} n_y \right) \xi_i d\Gamma + \iint_S f \xi_i dS = 0$$

$$i = 1, \dots, n \quad (18)$$

essendo T_{xx} e T_{yy} le componenti del tensore di trasmissività nelle direzioni coordinate x e y rispettivamente. Sostituendo in (18) l'espressione (12) di \hat{u} , e tenendo presente che l'integrale di linea rappresenta il flusso normale al contorno, si ha:

$$\iint_S \left[\sum_{j=1}^n \left(T_{xx} \frac{\partial \xi_j}{\partial x} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + T_{yy} \frac{\partial \xi_j}{\partial y} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \right) u_j \right] dS + \iint_S f \xi_i dS - \int_{\Gamma_q} q \xi_i d\Gamma = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (19)$$

Le (19) costituiscono un sistema di n equazioni nelle n incognite u_1, u_2, \dots, u_n che può essere scritto formalmente come in (15). Esso possiede un'infinità di soluzioni e per renderlo determinato occorre imporre la condizione al contorno (2). In particolare, ricordando che nel problema in esame si è assunta una trasmissività unitaria, si può immediatamente osservare che le equazioni (19) coincidono con le (14), verificando quindi l'equivalenza fra il metodo variazionale di Ritz e quello di Galerkin nel caso dell'operatore differenziale di Laplace.

Come funzioni base utilizziamo dei polinomi di interpolazione bidimensionali continui a tratti e con supporto locale. Pertanto, l'espressione assunta dal coefficiente h_{ij} dell'equazione i -esima in (15) che moltiplica l'incognita u_j è il risultato dell'assemblaggio dei contributi locali $h_{ij}^{(e)}$:

$$h_{ij} = \sum_e h_{ij}^{(e)} = \sum_e \iint_{S^{(e)}} \left[\frac{\partial \xi_j}{\partial x} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi_j}{\partial y} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \right] dS^{(e)} \quad (20)$$

mentre il termine noto f_i della medesima equazione è :

$$f_i = \sum_e f_i^{(e)} = \sum_e \iint_{S^{(e)}} f \xi_i dS^{(e)} - \sum_e \int_{\Gamma_q^{(e)}} q \xi_i d\Gamma^{(e)} \quad (21)$$

L'equazione (20) ci permette di osservare che la matrice di rigidezza H è simmetrica e, come si verifica facilmente, definita positiva. In più, la scelta di utilizzare come funzioni base dei polinomi a supporto locale fa sì che H sia anche sparsa. Pertanto il sistema (15) può essere efficientemente risolto con il metodo del Gradiente Coniugato Modificato (GCM).

3 Il codice di calcolo

Il problema definito dalla (1) va risolto mediante l'implementazione di un codice di calcolo automatico. È opportuno che, data la complessità dell'algoritmo globale, tale codice abbia una struttura modulare, con i vari moduli facilmente intercambiabili fra di loro. Si consiglia, ad esempio, di seguire lo schema descritto nel diagramma di flusso di Figura 2.

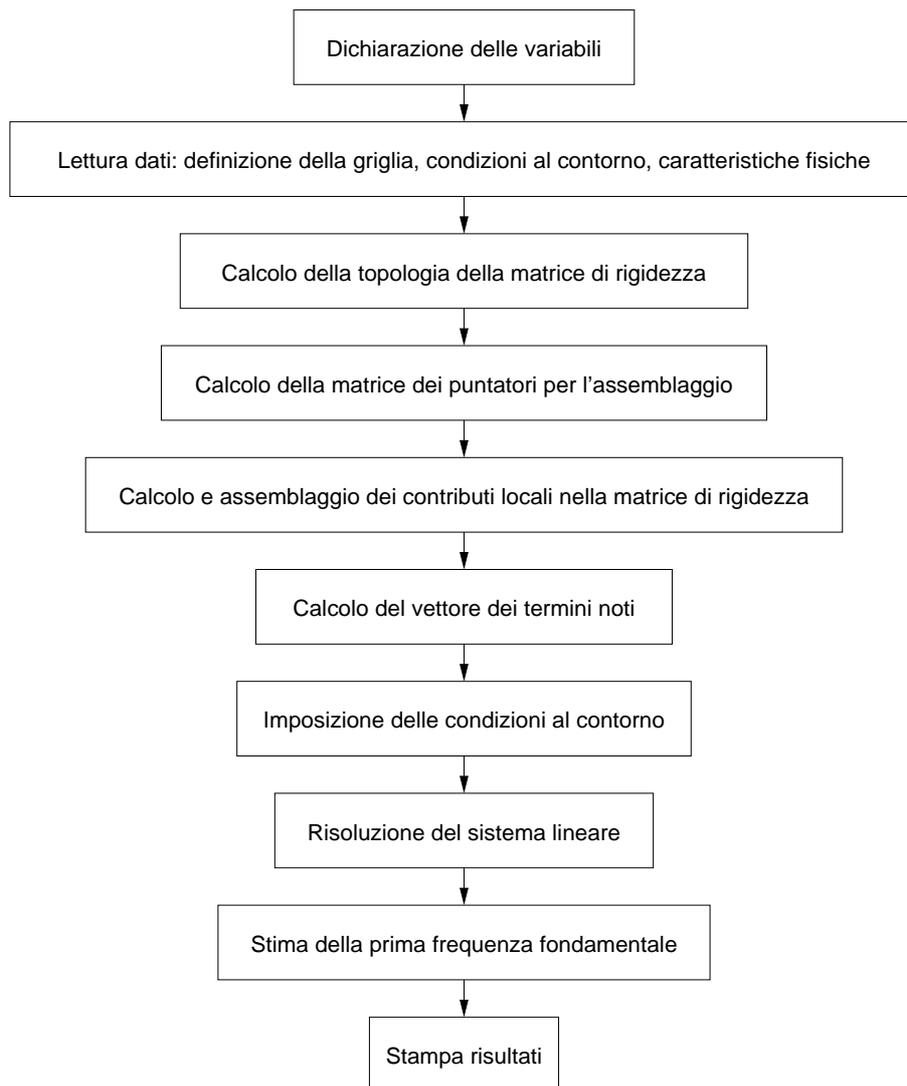


FIGURA 2: *Diagramma di flusso di massima per il codice FEM.*

3.1 Definizione della griglia computazionale

Si consideri una suddivisione del dominio S in elementi triangolari. La triangolazione è individuata da una tabella che fornisce per ciascun elemento la successione in senso antiorario degli indici dei nodi che lo caratterizzano. Generalmente, si introduce anche un indice finale che individua la zona di appartenenza del triangolo. Tale indice viene utilizzato per la definizione delle caratteristiche fisiche del dominio che possono variare da zona a zona. Ad esempio, si possono utilizzare indici diversi per identificare zone con una diversa permeabilità in un problema di flusso, o diversa rigidità in un problema strutturale. Ciascun nodo è, infine, determinato da una coppia di coordinate cartesiane x e y .

Nella definizione della griglia è importante individuare le zone del contorno del dominio caratterizzate da condizioni di Dirichlet, di Neumann o miste. Generalmente, il boundary del problema viene determinato indicando i nodi che lo compongono e la corrispondente condizione, vale a dire il valore \bar{u} laddove si imponga Dirichlet ed il valore $\partial u/\partial n$ laddove si imponga Neumann. Nel caso in esame, la condizione al contorno (2) è di Dirichlet e verrà individuata selezionando i nodi che cadono sul bordo del dominio quadrangolare S ed imponendo su ciascuno di essi un valore \bar{u} nullo. La condizione al contorno (3), invece, è di Neumann e verrà soddisfatta modificando il termine noto relativo ai nodi sui quali essa è assegnata.

La definizione della griglia computazionale, e cioè della tabella dei triangoli, delle coordinate nodali e dei nodi al contorno, viene direttamente fornita allo studente.

3.2 Calcolo della topologia della matrice di rigidità

La topologia della matrice H è costituita dal vettore degli indici di colonna \mathbf{JA} e dal vettore delle posizioni degli elementi diagonali \mathbf{IA} . Essi sono univocamente determinati dai contatti nodali definiti dalla maglia computazionale, i quali individuano tutti gli elementi potenzialmente non nulli della matrice di rigidità. Poiché nel nostro caso la matrice è simmetrica, si memorizzano solo gli elementi della parte triangolare alta di H e cioè solo gli elementi h_{ij} per cui $j \geq i$.

3.3 Calcolo della matrice dei puntatori

L'esecuzione dell'operazione di assemblaggio della matrice di rigidità è resa più complessa dalla tecnica di memorizzazione compatta. Per facilitare l'automatizzazione di tale procedura, conviene definire un vettore di matrici di puntatori \mathbf{TRIJA} . Il coefficiente $\mathbf{TRIJA}(i, j, k)$ individua la posizione a cui va aggiunto il contributo locale $h_{ij}^{(k)}$.

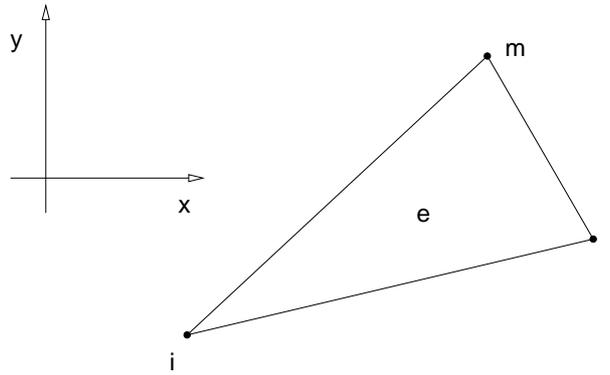


FIGURA 3: *Generico elemento triangolare i, j, m .*

3.4 Calcolo e assemblaggio dei contributi locali

Suddividiamo il dominio \mathcal{S} in elementi triangolari e ed indichiamo con $\hat{u}^{(e)}$ la soluzione approssimata sull'elemento e :

$$\hat{u}^{(e)}(x, y) = \sum_{k=1}^3 u_k \xi_k(x, y) \quad (22)$$

Nel generico elemento triangolare di Figura 3 $\hat{u}^{(e)}$ varia linearmente in funzione delle variabili nodali u_i, u_j, u_m , che rappresentano la soluzione \hat{u} sui nodi i, j, m . Le funzioni di forma ξ_k , infatti, sono calcolate utilizzando un'interpolazione lineare e sono convenientemente scelte in modo tale da:

- assumere valori non nulli solamente all'interno dell'elemento (supporto locale);
- valere 1 sul nodo cui sono associate e 0 sugli altri.

Esse assumono pertanto l'espressione:

$$\begin{aligned} \xi_i(x, y) &= (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta \\ \xi_j(x, y) &= (a_j + b_j x + c_j y) / 2\Delta \\ \xi_m(x, y) &= (a_m + b_m x + c_m y) / 2\Delta \end{aligned} \quad (23)$$

dove Δ è l'area dell'elemento:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix},$$

i coefficienti a_i, b_i e c_i sono dati da:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m \\ c_i &= x_m - x_j \end{aligned}$$

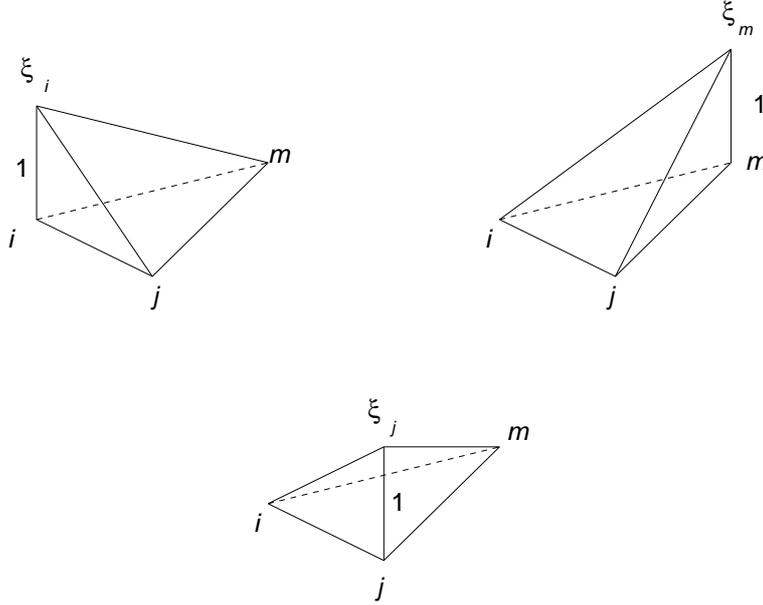


FIGURA 4: Funzioni base lineari definite sul generico triangolo di vertici i, j, m .

e gli altri si ottengono con una permutazione degli indici in senso antiorario:

$$a_j = x_m y_i - x_i y_m \quad b_j = y_m - y_i \quad c_j = x_i - x_m$$

$$a_m = x_i y_j - x_j y_i \quad b_m = y_i - y_j \quad c_m = x_j - x_i$$

L'andamento delle funzioni base ξ_k è mostrato in Figura 4.

Il termine generico della matrice locale del sistema FEM (detta *matrice di rigidezza locale*) dalla (20) vale:

$$h_{ij}^{(e)} = \iint_{S^{(e)}} \left[\frac{\partial \xi_j}{\partial x} \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi_j}{\partial y} \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \right] dS^{(e)} = \frac{1}{4\Delta} (b_i b_j + c_i c_j) \quad (24)$$

e quindi la matrice di rigidezza locale $H^{(e)}$ per un elemento triangolare a 3 nodi si può esprimere come:

$$H^{(e)} = \frac{1}{4\Delta} \left\{ \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_m \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_m \\ b_m b_i & b_m b_j & b_m b_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_m \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_m \\ c_m c_i & c_m c_j & c_m c_m \end{bmatrix} \right\} \quad (25)$$

I contributi (25) vanno assemblati nella matrice di rigidezza globale H attraverso la matrice dei puntatori TRIJA, costruendo in tal modo il vettore reale SYSMAT dei termini non nulli della matrice di rigidezza. Dopo aver calcolato la matrice di rigidezza locale $H^{(k)}$ associata all'elemento k -esimo, il suo assemblaggio nella matrice globale H può quindi essere eseguito mediante il seguente algoritmo:

```

001      Per  $i = 1, 3$ 
002          Per  $j = 1, 3$ 
003              Se  $\text{TRIJA}(i, j, k) \neq 0$ 
004                   $m := \text{TRIJA}(i, j, k)$ 
005                       $\text{SYSMAT}(m) := \text{SYSMAT}(m) + H^{(k)}(i, j)$ 
006              Fine Se
007          Fine Per
008      Fine Per

```

3.5 Calcolo del termine noto

Il contributo locale (21) al termine noto \mathbf{f} nell'equazione i -esima del sistema (15) per un nodo i interno al dominio \mathcal{S} o appartenente a Γ_u ha espressione:

$$f_i^{(e)} = \iint_{\mathcal{S}^{(e)}} f \xi_i dS^{(e)} \quad (26)$$

Nel caso in esame, si è assunto $f = 4 - 2x^2 - 2y^2$. L'integrale (26) non è facilmente risolvibile in modo esatto e ci limitiamo a ricavarne un'approssimazione per via numerica. Se la discretizzazione del dominio è sufficientemente fitta, la funzione f non varia molto all'interno di $\mathcal{S}^{(e)}$ e può quindi essere trattata come una costante. Approssimiamo f con il valore che essa assume nel punto $(x_{G^{(e)}}, y_{G^{(e)}})$ baricentro dell'elemento e ottenendo:

$$f_i^{(e)} \simeq (4 - 2x_{G^{(e)}}^2 - 2y_{G^{(e)}}^2) \iint_{\mathcal{S}^{(e)}} \xi_i dS^{(e)} = \frac{\Delta_e}{3} (4 - 2x_{G^{(e)}}^2 - 2y_{G^{(e)}}^2) \quad (27)$$

che risulta uguale per tutti i nodi appartenenti al medesimo triangolo. Tale approccio è noto come “midpoint rule” e sostanzialmente corrisponde all'integrazione di Gauss con un solo punto e peso unitario. Assemblare i contributi definiti dalla (27) è equivalente a calcolare la componente i -esima del termine noto globale come:

$$f_i = \frac{f(x_i, y_i)}{3} \sum_e \Delta_e = (4 - 2x_i^2 - 2y_i^2) \frac{\sum_e \Delta_e}{3} \quad (28)$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i triangoli che hanno un vertice nel nodo i . In sostanza, si può dire che il termine noto è pari al prodotto tra il termine noto della (1) e l'area di appartenenza del nodo i , cioè $1/3$ dell'area del patch di triangoli che condividono il nodo i . Può essere quindi conveniente predisporre un vettore contenente l'area di appartenenza relativa a ciascun nodo della griglia di calcolo.

Per i nodi situati lungo il boundary Γ_q il termine noto locale ha espressione:

$$f_i^{(e)} = \iint_{\mathcal{S}^{(e)}} f \xi_i dS^{(e)} - \int_{\Gamma_q^{(e)}} q \xi_i d\Gamma^{(e)} \quad (29)$$

Alla quantità calcolata mediante la procedura sopra illustrata per i nodi interni ad \mathcal{S} o situati su Γ_u va sottratto un integrale di bordo esteso a tutti gli elementi contenenti il nodo i e con un lato posto su Γ_q . La funzione base ξ_i lungo il lato dell'elemento e per il quale i è uno degli estremi si riduce ad una retta che assume valore 1 su i e 0 in corrispondenza all'altro estremo (Figura 4). Utilizzando ancora la “midpoint rule” e ricordando l'espressione di $q = 2(1 - y^2)$, il secondo integrale della (29) risulta:

$$\int_{\Gamma_q^{(e)}} q \xi_i d\Gamma^{(e)} \simeq 2(1 - y_{M^{(e)}}^2) \int_{\Gamma_q^{(e)}} \xi_i d\Gamma^{(e)} = l_e (1 - y_{M^{(e)}}^2) \quad (30)$$

dove $M^{(e)}$ è il punto medio del lato di e posto su Γ_q ed l_e è la sua lunghezza. Come osservato in precedenza, l'assemblaggio dei contributi (30) al termine noto è equivalente a modificare la sua componente i -esima (28) aggiungendo il contributo:

$$-\frac{1}{2}q(y_i) \sum_e l_e = (y_i^2 - 1) \sum_e l_e \quad (31)$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i triangoli che hanno un vertice nel nodo i ed un lato su Γ_q . In altri termini, la condizione di Neumann (3) si impone modificando il termine noto dei nodi situati su Γ_q ed aggiungendovi l'opposto di q calcolato in i moltiplicato per la lunghezza del segmento afferente al nodo i lungo Γ_q , cioè 1/2 della lunghezza totale dei segmenti di bordo che condividono il nodo i . Anche in questo caso può essere conveniente predisporre un vettore contenente la lunghezza del bordo afferente a ciascun nodo su cui viene assegnata una condizione di Neumann.

3.6 Imposizione delle condizioni al contorno

Si verifica facilmente che la matrice locale $H^{(e)}$ è singolare. Infatti la somma delle righe (colonne) produce la riga (colonna) nulla. Ciò comporta ovviamente che anche la matrice globale H sia singolare, come si poteva altresì dedurre dal fatto che, se si prescinde dalle condizioni al contorno di Dirichlet (2), la (1) ammette un'infinità di soluzioni. L'imposizione delle condizioni al contorno, che nel caso in esame corrispondono alla predisposizione di vincoli alla membrana per bloccare gli spostamenti sulla frontiera, trasforma H in una matrice regolare.

Le condizioni al contorno di Dirichlet si impongono preassegnando il valore dello spostamento nella fase di soluzione del sistema globale. Per far questo sarebbe necessario imporre un valore unitario al termine diagonale corrispondente al nodo di Dirichlet, azzerare tutti gli elementi extradiagonali della riga e della colonna corrispondenti, ed uguagliare il termine noto al valore della condizione di Dirichlet. Poiché è piuttosto complesso, data la simmetria di H e la sua memorizzazione compatta, cercare tutti i termini extradiagonali relativi alla colonna del nodo di Dirichlet, conviene sostituire l'elemento diagonale della matrice di rigidezza con un valore molto grande, ad

esempio $R_{max} = 10^{15}$, ed uguagliare il termine noto corrispondente al valore di Dirichlet moltiplicato per R_{max} . Nel nostro caso, basterà sostituire con R_{max} l'elemento diagonale ed annullare il termine noto corrispondente. In questo modo la condizione al contorno sarebbe soddisfatta esattamente se R_{max} fosse ∞ ; in pratica, è sufficiente usare R_{max} circa 10 ordini di grandezza maggiore degli elementi di H .

3.7 Soluzione del sistema lineare

Poiché la matrice di rigidezza H è sparsa, simmetrica e definita positiva, il sistema lineare (15), risultante dalle procedure di assemblaggio dei contributi locali sugli elementi e del termine noto, e dall'imposizione delle condizioni al contorno, viene risolto con il metodo del Gradiente Coniugato Modificato (GCM).

La velocità di convergenza del GCM risulta essere controllata dal rapporto λ_1/λ_n fra gli autovalori (positivi) estremi della matrice $E = HK^{-1}$. Le migliori performance si ottengono, in genere, adottando come matrice di preconditionamento la decomposta incompleta di Cholesky. La convergenza può essere ulteriormente accelerata migliorando preliminarmente la stima \mathbf{u}_0 della soluzione iniziale con poche iterazioni dello schema delle correzioni residue (CR). L'iterazione del GCM è completata quando il residuo relativo è inferiore ad una prefissata tolleranza, comunque non superiore a 10^{-6} .

3.8 Calcolo della prima frequenza fondamentale

Si vuole ora calcolare la prima frequenza fondamentale del sistema descritto dall'equazione (1) con la condizioni al contorno (2). Questa corrisponde alla prima frequenza propria della membrana o del bacino idrico considerato a seconda dell'interpretazione fisica della (1).

Il problema da risolvere risulta il seguente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \kappa^2 u = 0 \quad (32)$$

con le condizioni al contorno (2). Nella (32) κ è funzione di u ed è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda. Dalla teoria del calcolo variazionale si determina che le lunghezze d'onda ammissibili per la membrana in esame corrispondono ai punti di stazionarietà, cioè i punti con gradiente nullo, del funzionale:

$$\kappa^2(u) = \frac{\iint_S \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dS}{\iint_S \frac{1}{2} u^2(x, y) dS} \quad (33)$$

Fra tutti i punti di stazionarietà posseduti dal funzionale (33), noi siamo interessati al primo, corrispondente al valore minimo di κ associato al modo di vibrare con lunghezza d'onda massima.

Il funzionale (33) si calcola numericamente usando la soluzione approssimata \hat{u} della (12). Si osservi che \hat{u} può essere riscritta come il seguente prodotto scalare:

$$\hat{u} = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{u} \quad (34)$$

dove $\boldsymbol{\xi}$ è il vettore delle funzioni forma $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$. Utilizzando la (34) il numeratore della (33) risulta:

$$\iint_S \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right)^2 \right] dS = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left(\iint_S \left[\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^T}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial y} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^T}{\partial y} \right] dS \right) \mathbf{u} \quad (35)$$

Le funzioni forma ξ_k hanno supporto locale e pertanto la matrice definita dall'espressione integrale che compare nella (35) va calcolata mediante la consueta procedura di assemblaggio dei contributi derivanti dai termini locali. L'elemento in riga i e colonna j di tale matrice risulta pertanto:

$$\sum_e \iint_{S^{(e)}} \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x} \frac{\partial \xi_j}{\partial x} + \frac{\partial \xi_i}{\partial y} \frac{\partial \xi_j}{\partial y} \right] dS^{(e)} = h_{ij} \quad (36)$$

cioè proprio l'elemento in riga i e colonna j della matrice di rigidezza H (vedi equazione (20)). Il numeratore del funzionale (33) approssimato mediante la (12) si può dunque scrivere come:

$$\iint_S \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right)^2 \right] dS = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u} \quad (37)$$

Procedendo in modo analogo per il denominatore si ottiene:

$$\iint_S \frac{1}{2} \hat{u}^2 dS = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left(\iint_S \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^T dS \right) \mathbf{u} \quad (38)$$

L'espressione integrale definisce una matrice P il cui generico elemento p_{ij} , ottenuto mediante l'assemblaggio dei contributi locali, risulta:

$$p_{ij} = \sum_e p_{ij}^{(e)} = \sum_e \iint_{S^{(e)}} \xi_i \xi_j dS^{(e)} \quad (39)$$

Pertanto, il denominatore si scrive come:

$$\iint_S \frac{1}{2} \hat{u}^2 dS = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{P} \mathbf{u} \quad (40)$$

La matrice P è denominata *matrice di capacità* del sistema. Ricordando che:

$$\iint_{S^{(e)}} \xi_i \xi_j dS^{(e)} = \begin{cases} \frac{\Delta}{6} & i = j \\ \frac{\Delta}{12} & i \neq j \end{cases} \quad (41)$$

si ottiene la matrice di capacità locale su un generico elemento triangolare:

$$P^{(e)} = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Dalla (39) si può osservare che P è una matrice simmetrica non singolare ed è facile verificare che è anche definita positiva.

La procedura per assemblare le $P^{(e)}$ nella P è identica a quella implementata per assemblare le $H^{(e)}$ nella H . Si noti anche che la topologia di P sarà identica a quella di H , vale a dire che i vettori **JA** ed **IA** non cambiano.

L'espressione numerica del funzionale (33), ottenuta discretizzando numeratore e denominatore secondo la (37) e la (40), è dunque quella del quoziente di Rayleigh nella forma generalizzata:

$$\lambda(\hat{u}) = \kappa^2(\hat{u}) = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{H} \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{P} \mathbf{u}} \quad (43)$$

I vettori che rendono stazionaria la (43) rappresentano i modi di vibrare del sistema e λ l'inverso del quadrato della corrispondente lunghezza d'onda. La quantità cercata λ_n è pertanto l'autovalore minimo del problema generalizzato:

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{P} \mathbf{u} \quad (44)$$

ed il modo proprio di vibrare il corrispondente autovettore \mathbf{u}_n . Tali quantità possono essere calcolate efficientemente minimizzando il quoziente di Rayleigh generalizzato (43) col metodo del GCM. Anche in questo caso, affinché il problema sia determinato, è necessario imporre le condizioni al contorno (2) su H , altrimenti l'autovalore minimo del problema generalizzato risulterà nullo. Si osservi che l'imposizione delle condizioni al contorno mediante la procedura indicata in precedenza modifica lo spettro del problema generalizzato (44) in funzione dei valori R_{max} prescelti. In particolare, scompaiono gli autovalori nulli e si aggiungono autovalori dell'ordine di grandezza di R_{max} . Si può pertanto presumere che la modifica introdotta in H influenzi gli autovalori più grandi senza introdurre errori nel calcolo del minimo.

La convergenza viene raggiunta quando il residuo relativo risulta inferiore ad una prefissata tolleranza. Si può, ad esempio, adottare la medesima tolleranza utilizzata per la soluzione del sistema lineare o leggermente superiore nel caso di una convergenza più difficoltosa.

4 Applicazione del codice

Lo studente implementi un codice di calcolo robusto ed efficiente per la soluzione numerica del problema descritto nel primo paragrafo della presente nota mediante la tecnica degli elementi finiti. Si verifichi la correttezza del codice confrontando la soluzione numerica ottenuta con quella analitica (4). Quindi si studi la convergenza del metodo quando la dimensione degli elementi finiti triangolari sia progressivamente ridotta secondo un fattore costante. Si pensi di raffinare la griglia triangolare secondo lo schema illustrato in Figura 5. Ogni triangolazione più fine è ottenuta dalla precedente aggiungendo un nuovo nodo sul punto medio di ciascun lato. Pertanto ad ogni raffinamento i triangoli quadruplicano. La cosa interessante è che i nodi delle griglie più grossolane

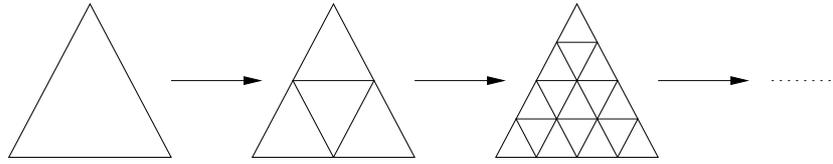


FIGURA 5: *Schema di raffinamento della griglia ad elementi finiti.*

sono un sottoinsieme di quelle più fini ed il rapporto fra le lunghezze dei lati si dimezza ad ogni raffinamento.

Lo studio della convergenza degli elementi finiti alla soluzione analitica consiste nel raffinare la mesh 3 o 4 volte, determinare l'approssimazione numerica di u e dell'autovalore/autovettore minimo e verificare i seguenti due importanti risultati:

1. la norma euclidea dell'errore diminuisce come ℓ^2 , dove ℓ è una dimensione rappresentativa della triangolazione (in pratica dell'ordine del lato di un qualsiasi triangolo);
2. l'autovalore minimo e l'autovettore ad esso associato convergono ad un valore limite al progredire del raffinamento della mesh.

La norma euclidea della funzione errore è per definizione:

$$\varepsilon = \left[\iint_S (\hat{u} - u)^2 dS \right]^{1/2} \quad (45)$$

dove \hat{u} è la soluzione numerica calcolata mediante il codice agli elementi finiti e u è la soluzione analitica (4). L'integrale (45) può essere calcolato numericamente mediante la "midpoint rule", vale a dire:

$$\varepsilon \simeq \left\{ \sum_{i=1}^n \left[(\hat{u}_i - u_i)^2 \frac{\sum_e \Delta_e}{3} \right] \right\}^{1/2} \quad (46)$$

in cui la sommatoria sugli elementi e è estesa a tutti i triangoli aventi in comune il nodo i . In pratica, il quadrato della differenza fra la soluzione numerica e quella analitica su ciascun nodo va pesato con l'area afferente al nodo già memorizzata per il computo delle componenti del termine noto.

Vengono assegnate 4 griglie di calcolo ottenute raffinando regolarmente la triangolazione iniziale. Per ciascuna griglia vengono inoltre fornite due versioni, la prima con la numerazione dei nodi originale definita dal software MeshMaker e la seconda rinumerata in modo da ottimizzare la banda della matrice di rigidezza del sistema.

Lo studente descriva lo svolgimento dell'esercitazione in una breve relazione completata dai seguenti allegati minimi:

- tabella di confronto fra la soluzione numerica e quella analitica per la griglia più grossolana con il calcolo dell'errore puntuale;

- diagrammi di convergenza in scala semilogaritmica del GCM per la soluzione del sistema: si presenti un diagramma con tutti i profili di convergenza relativi alle mesh assegnate ottenuti partendo da $\mathbf{x}_0 = K^{-1}\mathbf{f}$ ed utilizzando sia $K^{-1} = D^{-1}$ che $K^{-1} = (\tilde{L}\tilde{L}^T)^{-1}$. Si ponga sull'asse delle ascisse il numero di iterazioni e sull'asse delle ordinate la norma euclidea del residuo relativo;
- diagramma di convergenza in scala semilogaritmica del GCM per la soluzione del sistema con 1, 10, 20, 40 e 60 iterazioni preliminari effettuate con lo schema delle Correzioni Residue: per questo test si utilizzi la mesh più fine usando $K^{-1} = (\tilde{L}\tilde{L}^T)^{-1}$;
- diagrammi di convergenza in scala semilogaritmica del GCM per la minimizzazione del quoziente di Rayleigh generalizzato: si presenti un diagramma con tutti i profili di convergenza relativi alle mesh assegnate utilizzando $K^{-1} = D^{-1}$, $K^{-1} = (\tilde{L}\tilde{L}^T)^{-1}$ e $K^{-1} = A^{-1}$. Per quest'ultima opzione, si valuti nel problema con la griglia più raffinata l'effetto sul numero di iterazioni esterne ed interne della tolleranza di uscita nel calcolo del vettore $A^{-1}\mathbf{r}_{k+1}$, adottando almeno tre valori di prova (ad esempio, tolleranza interna pari a 10^{-2} , 10^{-6} e 10^{-10});
- tabella riassuntiva dei risultati in cui siano riportati ad ogni raffinamento successivo della triangolazione: (a) il valore ε dell'errore, (b) il rapporto fra l'errore corrispondente alla griglia corrente ed alla griglia meno raffinata immediatamente precedente; (c) l'autovalore minimo del problema generalizzato.
- il listato completo del codice di calcolo.

N.B. All'esame non sono ammessi grafici, relazioni e codici fotocopiati: tutto il materiale deve essere esibito in originale.