Università degli Studi di Padova

Soluzione di Equazioni non lineari

Corso di Metodi Numerici

20 Marzo 2019

Function in MATLAB

Lo scopo di una funzione è quello di prendere in input un certo numero di valori, fare alcune operazioni con tali argomenti e quindi restituire l'output.

- Lista di comandi/istruzioni con lista di variabili in input e output (opzionali)
- Le variabili usate all'interno della function sono locali e vengono eliminate dalla memoria dopo l'esecuzione della stessa
- La prima riga della function deve avere la seguente sintassi:
  ```
  >> function[parametri di output]=nomefunzione(parametri di input)
  ```
- I parametri di input e output vanno separati da virgole
- Il nome del file .m con cui viene salvata la function DEVE essere uguale al nome della function

FUNCTION - Esempio

```
function [A,p,d]=rettangolo(a,b)
% Calcolo area, perimetro e diagonale di un rettangolo
% dati i lati a e b
% Input: lati rettangolo (a, b)
% Output: area (A) , perimetro (p) e diagonale (D) di un rettangolo
%
A = a*b;
p= 2*(a+b);
d = sqrt(a^2+b^2);
```

- Eseguire la function da linea di comando:
  `>> [A,p,d]=rettangolo(3,4)` + INVIO
- Le function possono essere utilizzate all'interno di uno script (nb: la function va salvata nella stessa cartella dello script)

Equazioni non lineari in una variabile

Data una funzione $f(x)$ si vogliono cercare le soluzioni del problema $f(x) = 0$ con x che varia in un certo intervallo $[a, b]$.

1. metodo di bisezione
2. metodo di punto fisso
3. metodo di Newton-Raphson
4. metodo della secante variabile

ESERCIZIO - Il metodo della bisezione in MATLAB

Implementare con uno script il metodo della bisezione per trovare la radice della funzione $f(x) = ln(x) + x^2 - sin(\pi x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.
Utilizzare lo schema seguente:

1. Partire dall'intervallo $[a_0, b_0] = [a, b]$ e calcolarne il punto medio c_0
2. Controllare i casi in cui:
   - se $f(c_0)f(a_0) > 0$ allora $[a_1, b_1] = [c_0, b_0]$
   - se $f(c_0)f(b_0) > 0$ allora $[a_1, b_1] = [a_0, c_0]$
3. La precedente procedura si ripete ogni volta dimezzando il passo dell'intervallo. Ci si ferma se l'intervallo risulta minore di una certa tolleranza imposta.

ESERCIZIO - Il metodo della bisezione in MATLAB

- Plottare la funzione $f(x)$ nell'intervallo dato e verificare che agli estremi la funzione assuma valori opposti.
- Calcolare il numero di iterazioni teorico per raggiungere la tolleranza imposta e confrontare il risultato con quello ottenuto al calcolatore.
- Stampare a schermo una tabella con i risultati ottenuti, per esempio:

NUMERO DI ITERAZIONI — ESTREMO SX — ESTREMO DX — SOLUZIONE — VALORE FX NELLA SOLUZIONE

Il metodo della bisezione - SOLUZIONE ...

Completare il codice introducendo le istruzioni mancanti al posto dei puntini

```
clear all
close all
% Script che implementa il metodo dicotomico o della bisezione
a = 0;
b = 2*pi;
toll = 10^-6;
itmax = 100;
tau = abs(a-b);
f=@(x) log(x)+x.^2-sin(pi*x);
iter = 0;
while ...
    ...
    if ...
        ...
    else
        ...
    end
    ...
    fprintf('...')
end
```

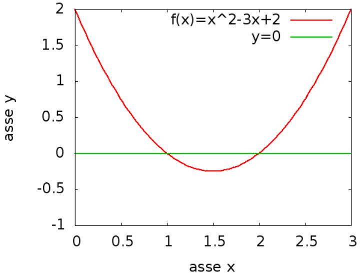
Equazioni non lineari in una variabile

Problema

Vogliamo implementare un programma in MATLAB per risolvere la seguente equazione non lineare: trovare $\xi \in \mathbb{R}$ tale che ξ è uno zero della funzione $f(x)$:

$$f(\xi) = 0$$

Esempio



$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Soluzioni: $\xi_1 = 1$ e $\xi_2 = 2$.
Fissiamo $x > 1.5$ in modo che il problema ammetta una sola soluzione, $\xi = 2$.

ESERCIZIO - Il metodo di punto fisso in MATLAB

L'equazione non lineare si può riformulare con un problema di punto fisso equivalente, cioè avente la stessa soluzione: trovare $\xi \in \mathbb{R}$ tale che ξ è un punto fisso della funzione $g(x)$: $g(\xi) = \xi$.
Sotto opportune condizioni, l'algoritmo di Picard costruisce una successione $x_0, x_1, x_2, \ldots$ che converge alla soluzione ξ: dato x_0, $x_{k+1} = g(x_k)$.

Condizioni di convergenza

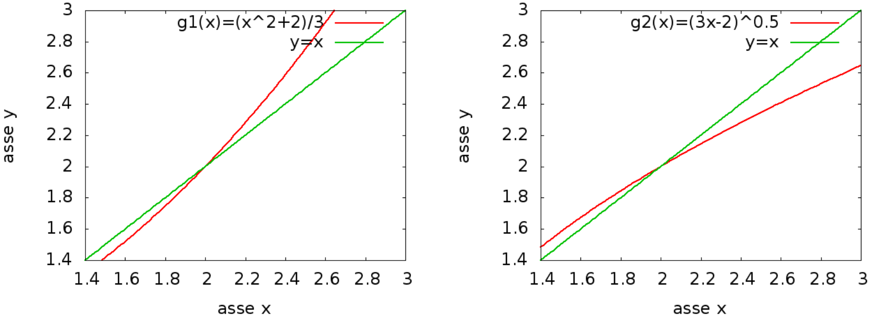
- $|g'(\xi)| < 1$
- x_0 sufficientemente vicina a ξ

ESERCIZIO - Il metodo di punto fisso in MATLAB

Per ottenere un problema di punto fisso equivalente all'equazione non lineare, isoliamo la variabile x nell'equazione $f(x) = 0$:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

diventa $x = (x^2 + 2)/3$ oppure $x = \sqrt{3x - 2}$.
Possiamo scegliere $g_1(x) = \frac{x^2+2}{3}$ oppure $g_2(x) = \sqrt{3x - 2}$.



ESERCIZIO - Il metodo di punto fisso in MATLAB

- Implementare il metodo di punto fisso in MATLAB (utilizzando uno script) per risolvere l'equazione $f(x) = 0$ con $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$. Applicare il metodo alle funzioni di punto fisso $g_1(x) = \frac{x^2+2}{3}$, $g_2(x) = \sqrt{3x-2}$ e $g_3(x) = \frac{x^2-2}{2x-3}$.
- Disegnare il grafico delle funzioni di punto fisso $g_1(x)$, $g_2(x)$ e $g_3(x)$ nell'intervallo $[1.4, 3.0]$ e vericare che il problema ammette un'unica soluzione.
- Utilizzare il criterio di arresto per cui l'approssimazione x_k della radice ξ sia calcolata a meno di una tolleranza `toll=10`$^{-10}$. Inoltre, si fissi un numero massimo di iterazioni `itmax=100` da eseguire.
- Stimare la costante asintotica di convergenza con i due metodi conosciuti ($M1 = d_{k+1}/d_k$ e $M2 = |g'(x_k)|$)
- Utilizzare i vettori per salvare i valori delle approssimazioni x_k, gli scarti d_k e le costanti asintotiche di convergenza $M1$ e $M2$.
- Disegnare il grafico del profilo di convergenza del metodo: plottare in un grafico semilogaritmico (comando `semilogy`) lo scarto in funzione del numero di iterazioni.
- Stampare i risultati ottenuti in una tabella del tipo:

  $\#$ Iterazioni k | x_k | $g(x_k)$ | d_k

- Commentare i risultati ottenuti al variare della funzione di punto fisso utilizzata.

SOLUZIONE ...

```
close all
clear all
% Schema di Picard per la soluzione di un'equazione non lineare
% Grafico della funzione nell'intervallo dato
figure(1)
...
% Dati di input
toll = 10^-10;
itmax = 100;
x0 = 1.6;
% Inizializzazioni delle variabili
xold = x0 ;                              % Impongo valore iniziale di x
dk(1) = 2.0*toll;                        % Impongo valore iniziale dello scarto
iter = 1;                                % Inizializzo contatore delle iterazioni
...                                      % Definisco la funzione g(x)
...                                      % Definisco la funzione g'(x)
% Ciclo while
while (condizione)
        iter = iter + 1;                 % Aggiorno il valore del contatore
        xnew = ...                       % Calcolo la nuova approssimazione xk
        dk(iter) = ...                   % Calcolo il valore dello scarto dk
        M1 = ...                         % Calcolo la costante asint. M1
        M2 = ...                         % Calcolo la costante asint. M2
        xold = xnew;                     % Aggiorno il valore di xold
        ...                              % Stampa dei risultati
end
% Plot dei risultati
figure(2)
...
```

ESERCIZI

1. Nell'esercizio precedente, tradurre in function la parte di codice che risolve il problema di punto fisso.
2. Implementare uno script in MATLAB per risolvere l'equazione $f(x) = 0$ con $f(x) = ln(x + 2) - 2x$ nell'intervallo $]-2, 2]$ applicando il metodo di Newton-Raphson e utilizzando come punto iniziale $x_0 = -0.5$. Disegnare il grafico del profilo di convergenza, verificare l'ordine di convergenza del metodo e stimare la costante asintotica di convergenza. Successivamente tradurre la parte di codice relativa alla soluzione con metodo di Newton-Raphson in una function da utilizzarsi anche negli esercizi seguenti.
3. Implementare uno script in MATLAB per approssimare la radice $\xi = 1$ del polinomio $p(x) = x(x-1)^3$ nell'intervallo $[-2, 2]$ applicando il metodo di Newton-Raphson partendo da $x_0 = 2.0$. Disegnare il grafico del profilo di convergenza e discutere il risultato ottenuto. Modificare opportunamente il metodo per ripristinare l'ordine di convergenza e risolvere nuovamente il problema.

ESERCIZI

4. Considerata l'equazione non lineare $f(x) = 0$ con $f(x) = arctan(7(x - \pi/2)) + sin((x - \pi/2)^3)$ nell'intervallo $]-1, 6]$. Disegnare il grafico della funzione nell'intervallo dato. Implementare uno script in MATLAB per approssimare la radice ξ con il metodo di Newton-Raphson assumendo come punto iniziale $x_{0,1} = 0.5$. Successivamente ripetere il calcolo partendo da $x_{0,2} = 4.0$.
5. Implementare uno script in MATLAB per approssimare le radici ξ_1 e ξ_2 del polinomio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ con il metodo di Newton-Raphson. Partire dal punto $x_0 = 2.5$ e discutere il risultato ottenuto. Cambiare il punto di partenza con $x_0 = 0.5$ e verificare l'ordine di convergenza del metodo.
6. Si consideri la funzione $f(x) = x^3 + 4xcos(x) - 2$ nell'intervallo $[0, 2]$. Approssimare la soluzione di $f(x) = 0$ con i metodi di bisezione, di Newton-Raphson e di punto con fisso utilizzando la funzione $g(x) = (2 - x^3)/(4cos(x))$. Riportare in uno stesso grafico il profilo di convergenza relativo ai metodi utilizzati. Si richiede che all'interno dello script vengano chiamate le function che implentano i vari metodi.