



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Algoritmi stabili e instabili

Corso di Metodi Numerici

06 Marzo 2019

Vettori in MATLAB

- Finora abbiamo pensato alle variabili utilizzate come semplici valori numerici (variabili scalari). In realtà, in MATLAB ogni variabile è una struttura di tipo vettoriale (ARRAY).
- ARRAY – > lista di valori ordinati secondo uno o più indici.
- ARRAY ad un indice – > VETTORE
- ARRAY a due indici – > MATRICE
- Esempio (array ad un indice):

#1	#2	#3	#4	#5
1	-1	3	4	5

Vettori in MATLAB

- Memorizzare un vettore **riga** in MATLAB:

```
>> x = [1 -1 3 4 0]
```

Gli spazi delimitano le singole componenti del vettore riga

- Memorizzare un vettore **colonna** in MATLAB:

```
>> x = [1; -1; 3; 4; 0]
```

I punti e virgola delimitano le singole componenti del vettore colonna

- Esempio: visualizzare il valore della quarta componente del vettore (riga o colonna):

```
>> x(4)
```

```
ans =
```

```
4
```

- Esempio: assegnare un valore alla terza componente del vettore (riga o colonna):

```
>> x(3) = -2
```

- Utilizzare i comandi `who` e `whos` per verificare quali sono le variabili presenti nell'ambiente di lavoro e le informazioni sulla loro dimensione, spazio occupato in memoria e tipo di variabile.

Vettori in MATLAB - Notazione due punti

- Costruzione di vettori equispaziati:

vettore = inizio:passo:fine

```
>> x = 0:0.1:0.5
```

```
x =
```

```
    0    0.1000    0.2000    0.3000    0.4000    0.5000
```

- Comando linspace:

linspace(inizio,fine,numero di punti)

```
>> x = linspace(0,0.5,6)
```

Il numero di punti è opzionale, se omesso viene posto uguale a 100.

- Estrarre parte delle componenti di un vettore:

```
>> y = x(2:4)
```

```
y =
```

```
    0.1000    0.2000    0.3000
```

Grafico di funzioni: comando plot

Visualizzare il grafico di una funzione NON predefinita in MATLAB

- 1 Vettorizzazione della funzione

```
>> x = linspace(0,pi,10);
```

```
>> y =
```

```
(15120-6900*x.^2+313*x.^4)./(15120+660*x.^2+13*x.^4);
```

- 2 Operazioni vettoriali: i valori della funzione in corrispondenza della successione di punti definita dal vettore x sono creati con una singola istruzione vettoriale e assegnati al vettore y .

- 3 Comando plot (principale function grafica di MATLAB)

```
>> plot(x,y)
```

Produce il grafico dei punti (x_i, y_i) .

I due vettori devono avere la stessa lunghezza.

Definizione di funzioni: funzioni 'anonime'

- 1 Se vogliamo definire in MATLAB una funzione del tipo:
 $f(arg1, arg2, ..) = espressione$
- 2 La sintassi è la seguente:

```
>> f = @(x) (15120-6900*x.^2+313*x.^4)./(15120+660*x.^2+13*x.^4)
```
- 3 Dopo il carattere @ è indicata la variabile in ingresso della funzione (tra parentesi)
- 4 Posso valutare la funzione in $z = 0$:

```
>> f(z)  
ans =  
      1
```

Precisione numerica

Quando si opera in aritmetica finita, non sempre un'operazione tra due o più numeri macchina produce un risultato. In particolare si ha:

- **overflow** quando l'operazione produce come risultato un numero più grande del massimo numero rappresentabile
- **underflow** quando l'operazione produce come risultato un numero più piccolo del minimo numero rappresentabile

<code>realmax</code>	massimo numero macchina positivo
<code>realmin</code>	minimo numero macchina positivo
<code>eps</code>	precisione di macchina (*)
<code>Inf</code>	∞ , ovvero numero maggiore di <code>realmax</code>
<code>-Inf</code>	$-\infty$, ovvero numero minore di <code>-realmax</code>
<code>NaN</code>	Not-a-Number, tipicamente il risultato di operazioni illecite come $0 * \infty$, $0/0$ e ∞/∞

(*) Il più piccolo numero che sommato a 1 fornisce un numero maggiore di 1.

Stabilità numerica - schema instabile

Vogliamo scrivere un programma per il calcolo dei seguenti integrali I_n :

$$I_n = \frac{1}{e} \int_0^1 x^n e^x dx, \quad n = 0, \dots, 20. \quad (1)$$

Dall'integrazione per parti si ottiene la seguente formula ricorrente:

$$I_n = 1 - \frac{n}{e} \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = 1 - nI_{n-1}, \quad (2)$$

con $I_0 = 1 - 1/e$. L'applicazione diretta di questa formula ricorrente è *instabile*, cioè amplifica gli errori di arrotondamento.

Stabilità numerica - schema stabile

Dalla formula $I_n = 1 - nI_{n-1}$ possiamo ottenere il seguente schema all'indietro:

$$I_{n-1} = \frac{(1 - I_n)}{n}, \quad n = 20, 19, \dots, 1. \quad (3)$$

Sapendo che $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$, approssimiamo $I_n = 0$ per un n sufficientemente grande (e.g. $I_{20} = 0$). L'applicazione di questa formula è *stabile*.

Stabilità numerica - ESERCIZIO 1

Implementare i due schemi (stabile e instabile) per il calcolo di I_n :

$$I_n = \frac{1}{e} \int_0^1 x^n e^x dx, \quad n = 0, \dots, 20. \quad (4)$$

Per lo scopo scrivere due script distinti in MATLAB.

Stabilità numerica - SOLUZIONE ...

```
1 % Calcolo di n integrali con formula ricorsiva per lo studio
2 % della stabilita' numerica - CASO INSTABILE
3 %
4 % Inizializzazione delle variabili
5 ...
6 % Ciclo for
7 for ... % Condizione
8     int = 1.0 - n * int; % Calcolo integrale
9     ... % Stampa a schermo le variabili n e int
10 end
```

ATTENZIONE: la sequenza di istruzioni all'interno del ciclo `for` vale solo per il caso instabile.

Stabilità numerica - ESERCIZIO 2

Implementare i due schemi (stabile e instabile) per il calcolo di I_n utilizzando le variabili come vettori e plottare i risultati ottenuti.

$$I_n = \frac{1}{e} \int_0^1 x^n e^x dx, \quad n = 0, \dots, 20. \quad (5)$$

Per lo scopo scrivere due script distinti in MATLAB.

Stabilità numerica - SOLUZIONE utilizzando i vettori

```
1 clear all
2 close all
3 % program stabile
4 nmax = 20;
5 n = nmax;
6 intn(n) = 0.0;
7 while (n > 1)
8     intn(n-1) = (1.0 - intn(n)) / n;
9     n = n - 1; % Aggiornamento variabile n
10    fprintf('%e \n', intn(n))
11 end
12 % Plot del risultato
13 x = linspace(1,20,nmax);
14 plot(x,intn,'*')
```

ATTENZIONE: la sequenza di istruzioni all'interno del ciclo `while` vale solo per il caso stabile.

ESERCIZI

- 1 Calcolare in MATLAB l'espressione $((x + 1) - 1)/x$ per $x = 10^{-15}$. Discutere l'errore numerico commesso.
- 2 Valutare le espressioni equivalenti $p1(x) = (x - 1)^7$ e $p2(x) = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$ in $x = [0.99, 1.01]$ con passo $\Delta x = 0.001$ e discutere il risultato.
Plottare il grafico delle funzioni nell'intervallo considerato.
- 3 Scrivere uno script per il calcolo delle radici di un'equazione di secondo grado, x_1 e x_2 , e verificare il risultato nel caso in cui:
 - $a, c = 1; b = 5$
 - $a, c = 1; b = 10^7$

Verificare la correttezza del risultato controllando che $x_1 \cdot x_2 = c/a$.

Modificare lo script per evitare il fenomeno della cancellazione numerica:

- Ricavare la radice x_1 non affetta da errori di cancellazione numerica (dipende dal segno di b).
- Calcolare la seconda radice x_2 come $c/(a \cdot x_1)$.