

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Interpolazione e approssimazione di dati

Corso di Metodi Numerici

22 Marzo 2018

Introduzione

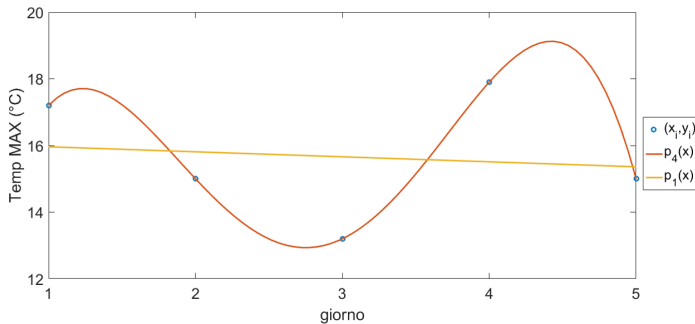
Implementazione in MATLAB di interpolazione polinomiale e approssimazione di dati.

Date $n + 1$ coppie di punti (x_i, y_i) con $i = 0, 1, \dots, n$, dove y_i può essere il valore assunto da una funzione f in x_i o il valore di un certo dato sperimentale, l'obiettivo è quello di:

- determinare il polinomio interpolatore $P(x)$ tale che $P(x_i) = y_i$ per $i = 0, 1, \dots, n$ (Interpolazione polinomiale).
- determinare il polinomio $\phi(x)$ i cui coefficienti sono calcolati con il metodo dei minimi quadrati (Approssimazione polinomiale)

Esempio - Interpolazione vs Approssimazione

- Data la tabella delle coppie di punti (x_i, y_i) con $i = 0, \dots, 4$, determinare il polinomio interpolatore $p_4(x)$ e la retta di regressione lineare ai minimi quadrati $p_1(x)$.



Giorno	Temp MAX (°C)
1	17.2
2	15.0
3	13.2
4	17.9
5	15.0

Soluzione del problema in MATLAB

- 1 Inserire i dati (x_i, y_i) come vettori \mathbf{x} e \mathbf{y} contenenti i valori della tabella
- 2 Determinare gli $n + 1$ coefficienti del polinomio interpolatore o approssimatore di grado n :

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

- 3 Valutare i valori del polinomio nei punti richiesti.

1. Inserire i dati

- 1 Introdurre i valori x_i come vettore:

```
>> xx = [1 2 3 4 5]
```

- 2 Introdurre i valori y_i come vettore:

```
>> yy = [17.2 15.0 13.2 17.9 15.0]
```

2. La funzione polyfit: Polynomial Curve Fitting

- La funzione restituisce i coefficienti del polinomio $p_m(x)$ di grado m che meglio approssima i dati attraverso l'approssimazione ai minimi quadrati. I coefficienti saranno $m + 1$

- Sintassi:

```
>> p = polyfit(x,y,m)
```

I vettori \mathbf{x} e \mathbf{y} contengono i valori dei punti di appoggio x_i e dei dati y_i . Se $m = 1$ si ha la retta di regressione lineare, se $m = n$ si ha il polinomio interpolatore. In output, il vettore \mathbf{p} contiene gli $m+1$ valori dei coefficienti del polinomio in ordine decrescente:

$$p_m(x) = p(1)x^m + p(2)x^{(m-1)} + \dots + p(m)x + p(m+1)$$

Esempio:

```
xx = linspace(0,4*pi,10)
```

```
yy = sin(x);
```

```
p = polyfit(xx,yy,7);
```

3. La funzione `polyval`: Polynomial Evaluation

- La funzione restituisce i valori del polinomio $p_m(x)$ di grado m calcolati in x .
- Sintassi:

```
>> y = polyval(p,x)
```

Il vettore **p** contiene i coefficienti del polinomio (in ordine decrescente) determinati con la funzione `polyfit`. Il vettore **x** contiene i valori dei punti in cui si intende valutare il polinomio.

Esempio:

```
xval = [1 2 3];
```

```
yval = polyval(p,xval);
```

Caricare i dati in MATLAB

- In molti casi, è utile caricare i dati in MATLAB direttamente da file di input (file di testo), evitando di inserirli come visto precedentemente.
- Modalità 1. Carico due file distinti, ciascuno dei quali con i dati relativi ai vettori \mathbf{x} e \mathbf{y} :

```
>> xx = load('puntix.txt');
```

```
>> yy = load('puntiy.txt');
```

- Modalità 2. Carico un unico file e successivamente associo i vettori \mathbf{x} e \mathbf{y} ai dati caricati:

```
>> DD = load('punti.txt');
```

```
>> xx = DD(:,1);
```

```
>> yy = DD(:,2);
```


ESERCIZI

- 1 Dati i seguenti punti:

x_i	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
$f(x_i)$	102.56	120.84	131.23	142.00	168.95	196.12	225.00	259.47	293.29	342.71

Trovare la retta di approssimazione che minimizza gli scarti verticali, la curva di approssimazione $y = ae^{bx}$ e la curva di approssimazione $y = ax^b$

- 2 Di una funzione incognita $f(x)$ si conoscono le seguenti informazioni:

x_i	1	2	2.5	4
$f(x_i)$	2	2.5	3.8	5

(a) Determinare il polinomio $P(x)$ che interpola i dati assegnati. (b) Costruire la retta di approssimazione $r(x)$ che minimizza gli scarti verticali. (c) Disegnare in uno stesso grafico i punti della tabella, il polinomio $P(x)$ e la retta $r(x)$.

ESERCIZI

- 3 Determinare il polinomio di terzo grado che interpola i seguenti valori della funzione: $f(0) = 3$, $f(1) = -3$, $f(2) = 1$ e $f(3) = 33$. Stimare $f(0) = 0.5$ e $f'(0) = 0.5$.
- 4 Si interpoli la funzione di Runge $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nell'intervallo $[-5, 5]$ partendo da 3 punti equidistanti nell'intervallo. Successivamente costruire i polinomi di interpolazione con grado $n = 4, 6, 8, 12$ e nodi equidistanti. Disegnare nello stesso grafico la funzione f e i polinomi interpolatori. Commentare il risultato ottenuto.