



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

# Interpolazione e approssimazione di dati

Corso di Metodi Numerici

22 Marzo 2018

# Introduzione

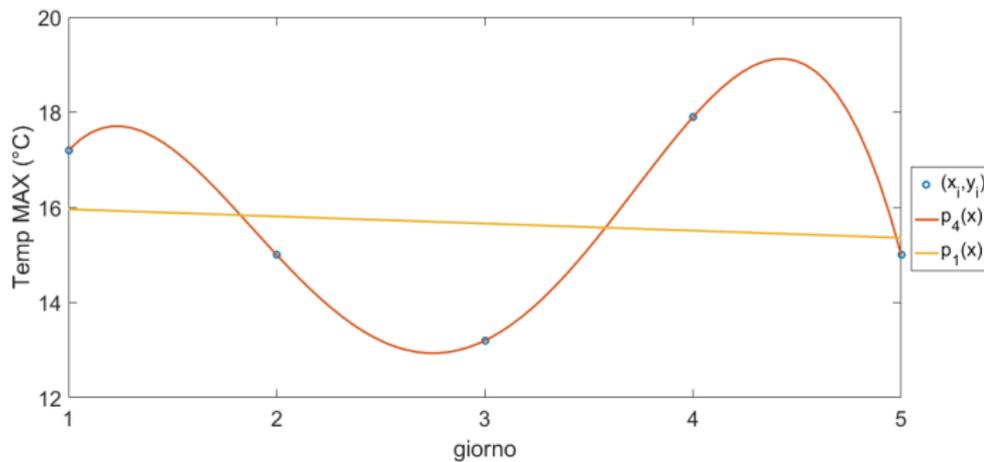
Implementazione in MATLAB di interpolazione polinomiale e approssimazione di dati.

Date  $n + 1$  coppie di punti  $(x_i, y_i)$  con  $i = 0, 1, \dots, n$ , dove  $y_i$  può essere il valore assunto da una funzione  $f$  in  $x_i$  o il valore di un certo dato sperimentale, l'obiettivo è quello di:

- determinare il polinomio interpolatore  $P(x)$  tale che  $P(x_i) = y_i$  per  $i = 0, 1, \dots, n$  (Interpolazione polinomiale).
- determinare il polinomio  $\phi(x)$  i cui coefficienti sono calcolati con il metodo dei minimi quadrati (Approssimazione polinomiale)

# Esempio - Interpolazione vs Approssimazione

- Data la tabella delle coppie di punti  $(x_i, y_i)$  con  $i = 0, \dots, 4$ , determinare il polinomio interpolatore  $p_4(x)$  e la retta di regressione lineare ai minimi quadrati  $p_1(x)$ .



Giorno	Temp MAX (°C)
1	17.2
2	15.0
3	13.2
4	17.9
5	15.0

# Soluzione del problema in MATLAB

- 1 Inserire i dati  $(x_i, y_i)$  come vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  contenenti i valori della tabella
- 2 Determinare gli  $n + 1$  coefficienti del polinomio interpolatore o approssimatore di grado  $n$ :

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

- 3 Valutare i valori del polinomio nei punti richiesti.

# 1. Inserire i dati

- 1 Introdurre i valori  $x_i$  come vettore:

```
>> xx = [1 2 3 4 5]
```

- 2 Introdurre i valori  $y_i$  come vettore:

```
>> yy = [17.2 15.0 13.2 17.9 15.0]
```

## 2. La funzione polyfit: Polynomial Curve Fitting

- La funzione restituisce i coefficienti del polinomio  $p_m(x)$  di grado  $m$  che meglio approssima i dati attraverso l'approssimazione ai minimi quadrati. I coefficienti saranno  $m + 1$

- Sintassi:

```
>> p = polyfit(x,y,m)
```

I vettori **x** e **y** contengono i valori dei punti di appoggio  $x_i$  e dei dati  $y_i$ . Se  $m = 1$  si ha la retta di regressione lineare, se  $m = n$  si ha il polinomio interpolatore. In output, il vettore **p** contiene gli  $m+1$  valori dei coefficienti del polinomio in ordine decrescente:

$$p_m(x) = p(1)x^m + p(2)x^{(m-1)} + \dots + p(m)x + p(m+1)$$

Esempio:

```
xx = linspace(0,4*pi,10)
```

```
yy = sin(x);
```

```
p = polyfit(xx,yy,7);
```

### 3. La funzione `polyval`: Polynomial Evaluation

- La funzione restituisce i valori del polinomio  $p_m(x)$  di grado  $m$  calcolati in  $x$ .
- Sintassi:

```
>> y = polyval(p,x)
```

Il vettore **p** contiene i coefficienti del polinomio (in ordine decrescente) determinati con la funzione `polyfit`. Il vettore **x** contiene i valori dei punti in cui si intende valutare il polinomio.

Esempio:

```
xval = [1 2 3];
```

```
yval = polyval(p,xval);
```

## Caricare i dati in MATLAB

- In molti casi, è utile caricare i dati in MATLAB direttamente da file di input (file di testo), evitando di inserirli come visto precedentemente.
- Modalità 1. Carico due file distinti, ciascuno dei quali con i dati relativi ai vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ :

```
>> xx = load('puntix.txt');
```

```
>> yy = load('puntiy.txt');
```

- Modalità 2. Carico un unico file e successivamente associo i vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  ai dati caricati:

```
>> DD = load('punti.txt');
```

```
>> xx = DD(:,1);
```

```
>> yy = DD(:,2);
```

# ESERCIZI

- 1 Dati i seguenti punti:

$x_i$	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
$f(x_i)$	102.56	120.84	131.23	142.00	168.95	196.12	225.00	259.47	293.29	342.71

Trovare la retta di approssimazione che minimizza gli scarti verticali, la curva di approssimazione  $y = ae^{bx}$  e la curva di approssimazione  $y = ax^b$

- 2 Di una funzione incognita  $f(x)$  si conoscono le seguenti informazioni:

$x_i$	1	2	2.5	4
$f(x_i)$	2	2.5	3.8	5

(a) Determinare il polinomio  $P(x)$  che interpola i dati assegnati. (b) Costruire la retta di approssimazione  $r(x)$  che minimizza gli scarti verticali. (c) Disegnare in uno stesso grafico i punti della tabella, il polinomio  $P(x)$  e la retta  $r(x)$ .

## ESERCIZI

- 3 Determinare il polinomio di terzo grado che interpola i seguenti valori della funzione:  $f(0) = 3$ ,  $f(1) = -3$ ,  $f(2) = 1$  e  $f(3) = 33$ . Stimare  $f(0) = 0.5$  e  $f'(0) = 0.5$ .
- 4 Si interpoli la funzione di Runge  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  nell'intervallo  $[-5, 5]$  partendo da 3 punti equidistanti nell'intervallo. Successivamente costruire i polinomi di interpolazione con grado  $n = 4, 6, 8, 12$  e nodi equidistanti. Disegnare nello stesso grafico la funzione  $f$  e i polinomi interpolatori. Commentare il risultato ottenuto.