Corso di Metodi Numerici per l'Ingegneria

Esercitazione 3. Equazioni Differenziali Ordinarie

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria per Meccanica e Meccatronica (VI)

Prof. M. Ferronato

L'equazione logistica, nota anche come *modello di Verlhust*, è un'equazione differenziale del primo ordine che fornisce un modello di crescita di una popolazione. Il modello assume che il tasso di riproduzione r sia proporzionale alla popolazione esistente P e all'ammontare delle risorse disponibili. All'aumentare della popolazione, aumenta la competizione per ripartirsi le risorse, con una conseguente limitazione alla crescita indefinita di P.

L'equazione di Verlhust è:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

dove K rappresenta il termine asintotico a cui tende P, compatibilmente con l'ammontare complessivo delle risorse disponibili. Si determini il comportamento della funzione $P(t)$ con tasso di crescita $r = 0.10$ nell'intervallo temporale $]0, 100]$. Si assuma $K = 20$ e la condizione iniziale $P_0 = 2$.

Si risolva numericamente l'equazione di Verlhust con i seguenti metodi:

- Eulero esplicito e implicito,
- Crank-Nicolson,
- Heun,
- Predictor-Corrector del secondo ordine,

adottando un passo di discretizzazione $h = 0.5, 1, 5, 10$. Sapendo che la soluzione analitica del problema proposto è la *funzione logistica*:

$$P(t) = \frac{KP_0e^{rt}}{K + P_0(e^{rt} - 1)}$$

calcolare gli errori commessi con ciascuno dei metodi utilizzati.