



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Quadratura numerica

Corso di Calcolo Numerico

15 Aprile 2019

Introduzione

Implementazione in MATLAB delle formule di quadratura numerica per l'approssimazione dell'integrale $I = \int_a^b f(x)dx$:

- Formula dei trapezi

$$I_T \approx (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

- Formula dei trapezi composta

$$I_{T,n} \approx \frac{(b - a)}{n} \left(\frac{f_0 + f_n}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} \right)$$

- Formula di Cavalieri-Simpson

$$I_{CV} \approx \frac{(b - a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

- Formula di Cavalieri-Simpson composta

$$I_{CV,n} \approx \frac{(b - a)}{6n} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n})$$

La formula dei trapezi semplice in MATLAB

Si vuole calcolare l'integrale I con la formula dei trapezi semplice:

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx$$

```
% Approssimazione di un integrale con
% la formula dei trapezi semplice
clear
close all
% Apertura file di output
fid = fopen('risult.dat','w');
% Dati in input
a = 0;
b = pi/2;
% Chiamata alla function 'trap'
int = trap(@cos,a,b);
% Scrittura file di output
fprintf(fid, '%e', int)
% Chiusura file
fclose(fid)
```

```
function integrale = trap(f,a,b)
% function integrale = trap(f,a,b)
% function per il calcolo approssimato di un
% integrale con la formula dei trapezi
%
% Input: f -> funzione da integrare
%        a,b -> estremi di integrazione
% Output: integrale -> valore integrale
%         approssimato

integrale = (b-a)*0.5*(f(a)+f(b));

end
```

La formula dei trapezi composta in MATLAB

Si vuole calcolare l'integrale $I = \int_a^b f(x) dx$ con la formula dei trapezi composta generalizzata al caso con n sotto-intervalli. Posti $h = (b - a) / n$ e $x_0 = a$, l'integrale I viene approssimato con:

$$I \approx I_{T,n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \quad (1)$$

dove $x_{i+1} = x_i + h$. L'intervallo di integrazione è uniformemente suddiviso in n sotto-intervalli ciascuno di ampiezza h .

La formula dei trapezi composta in MATLAB

Scrivere uno script chiamato *integrale.m* che: legge da file i valori a , b , ed n . Lo script chiama la funzione *trapcomp* che restituisce il valore approssimato dell'integrale, $I_{T,n}$. Alla fine dello script si effettuano le stampe.

```
% Approssimazione di un integrale con
% la formula dei trapezi composta
clear
close all
% Apertura file di output
fid = fopen('result.dat','w');
% Carico input
DD = load('input.dat')
a = DD(1); % estremo inferiore
b = DD(2); % estremo superiore
n = DD(3); % numero sottointerv.
% Chiamata alla function 'trapcomp'
int = trapcomp(@cos,a,b,n);
int2 = trapcomp2(@cos,a,b,n);
% Scrittura file di output
fprintf(fid, '%e %e ', int, int2)
% Chiusura file
fclose(fid)
```

La formula dei trapezi composta in MATLAB

Scrivere uno script chiamato *integrale.m* che: legge da file i valori a , b , ed n . Lo script chiama la funzione *trapcomp* che restituisce il valore approssimato dell'integrale, $I_{T,n}$. Alla fine dello script si effettuano le stampe.

```
function integrale = trapcomp(f,a,b,n)
% function integrale = trap(f,a,b)
% function per il calcolo approssimato di un
% integrale con la formula dei trapezi composta
%
% Input:  f  -> funzione da integrare
%         a,b -> estremi di integrazione
%         n  -> numero sottointervalli
% Output: integrale -> valore integrale
%         approssimato

% Valuto ampiezza sottointervallo
h = (b-a)/n;
% Inizializzazione
integrale = 0.0
x0 = a;
% Ciclo su n sottointerv.
for i=1:n
    x1 = x0 + h;
    integrale = integrale + trap(f,x0,x1);
    x0 = x1;
% secondo estremo
% aggiorno integrale
% aggiorno primo estremo
end
end
```

La formula dei trapezi composta in MATLAB

È possibile automatizzare il calcolo dell'integrale per valori di $n = 1, 2, 4, \dots$ scrivendo $n = (2^0, 2^1, 2^2, \dots)$. Il calcolo di I al variare di n si ottiene inserendo la chiamata alla funzione *trapcomp* all'interno di un ciclo nello script principale:

```
for j=0,8
    n = 2^j;
    int = trapcomp(f, a, b, n);
end
```

La formula dei trapezi composta in MATLAB

Nell'ipotesi di suddivisioni in parti uguali dell'intervallo, la formula dei Trapezi composta si può scrivere in modo piú compatto come:

$$I_{T,n} \approx \frac{(b-a)}{n} \left(\frac{f_0 + f_n}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} \right)$$

```
function integrale = trapcomp2(f,a,b,n)
% function integrale = trap(f,a,b)
% function per il calcolo approssimato di un
% integrale con la formula dei trapezi compatta
%
% Input:  f -> funzione da integrare
%         a,b -> estremi di integrazione
%         n -> numero sottointervalli
% Output: integrale -> valore integrale
%         approssimato

% Valuto ampiezza sottointervallo
h = (b-a)/n;
% Costruisco vettore con nodi della formula
x = [a:h:b];
% Valuto la funzione in x
y = f(x);
% Calcolo integrale
integrale = 0.5 * (y(1)+y(n+1)) + sum(y(2:n));
integrale = integrale * h;
end
```

ESERCIZI

- 1 Approssimare l'integrale $I = \int_1^2 x \ln(x) dx$ con la formula composta dei Trapezi su suddivisioni uniformi dell'intervallo dato. In particolare, si usino $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ suddivisioni dell'intervallo. Valutare analiticamente il valore dell'integrale vero e, per ogni suddivisione, calcolare l'errore di integrazione $E_{T,n} = |I - I_{T,n}|$. Per ogni valore di n , stampare in una tabella i valori di: $n, I, I_{T,n}, E_{T,n}, E_{T,n/2}/E_{T,n}$. Commentare la convergenza del rapporto tra gli errori $E_{T,n/2}/E_{T,n}$.
- 2 Implementare uno script in MATLAB per il calcolo approssimato dell'integrale $I = \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx$ con la formula di Cavalieri-Simpson, mediante la funzione *cavalieri.m* che restituisce il valore approssimato dell'integrale. I dati di input sono letti da file. Stampare in un file di output il valore dell'integrale esatto I , dell'integrale approssimato I_{CV} e dell'errore di integrazione $E_{CV} = |I - I_{CV}|$.

ESERCIZI

- 3 Svolgere l'esercizio (2) usando la formula di Cavalieri-Simpson composta e confrontare i risultati ottenuti con la formula dei Trapezi composta.
- 4 Svolgere l'esercizio (1) con la formula di Cavalieri-Simpson composta.
- 5 Implementare la formula di estrapolazione di Richardson applicata alla formula di Cavalieri-Simpson per svolgere l'esercizio (1). Commentare come evolve il rapporto tra gli errori ad ogni suddivisione successiva dell'intervallo di integrazione.