UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Interpolazione e approssimazione di dati

Corso di Calcolo Numerico

08 Aprile 2019

Introduzione

Implementazione in MATLAB di interpolazione polinomiale e approssimazione di dati.

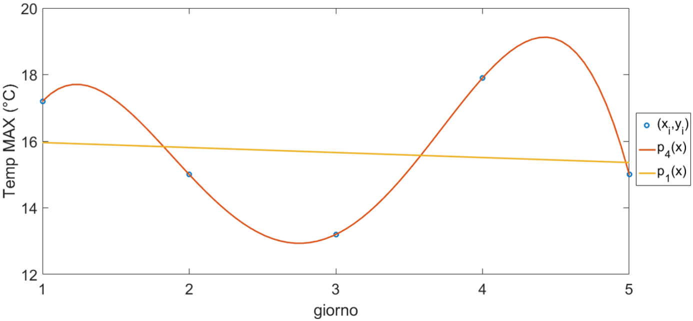
Date $n+1$ coppie di punti (x_i, y_i) con $i = 0, 1, ..., n$, dove y_i può essere il valore assunto da una funzione f in x_i o il valore di un certo dato sperimentale, l'obiettivo è quello di:

- determinare il polinomio interpolatore $P(x)$ tale che $P(x_i) = y_i$ per $i = 0, 1, ..., n$ (Interpolazione polinomiale).
- determinare il polinomio $\phi(x)$ i cui coefficienti sono calcolati con il metodo dei minimi quadrati (Approssimazione polinomiale)

Esempio - Interpolazione vs Approssimazione

- Data la tabella delle coppie di punti (x_i, y_i) con $i = 0, .., 4$, determinare il polinomio interpolatore $p_4(x)$ e la retta di regressione lineare ai minimi quadrati $p_1(x)$.

Giorno	Temp MAX (°C)
1	17.2
2	15.0
3	13.2
4	17.9
5	15.0



Soluzione del problema in MATLAB

1. Inserire i dati (x_i, y_i) come vettori **x** e **y** contenenti i valori della tabella
2. Determinare gli $n+1$ coefficienti del polinomio interpolatore o approssimatore di grado n:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

3. Valutare i valori del polinomio nei punti richiesti.

1. Inserire i dati

1. Introdurre i valori x_i come vettore:
   ```
   >> xx = [1 2 3 4 5]
   ```
2. Introdurre i valori y_i come vettore:
   ```
   >> yy = [17.2 15.0 13.2 17.9 15.0]
   ```

2. La funzione `polyfit`: Polynomial Curve Fitting

- La funzione restituisce i coefficienti del polinomio $p_m(x)$ di grado m che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati. I coefficienti saranno $m+1$
- Sintassi:
```
>> p = polyfit(x,y,m)
```
I vettori **x** e **y** contengono i valori dei punti di appoggio x_i e dei dati y_i. Se $m=1$ si ha la retta di regressione lineare, se $m=n$ si ha il polinomio interpolatore. In output, il vettore **p** contiene gli $m+1$ valori dei coefficienti del polinomio in ordine decrescente:

$$p_m(x) = p(1)x^m + p(2)x^{(m-1)} + ... + p(m)x + p(m+1)$$

Esempio:
```
xx = linspace(0,4*pi,10)
yy = sin(x);
p = polyfit(xx,yy,7);
```

3. La funzione `polyval`: Polynomial Evaluation

- La funzione restituisce i valori del polinomio $p_m(x)$ di grado m calcolati in x.
- Sintassi:
  `>> y = polyval(p,x)`
  Il vettore **p** contiene i coefficienti del polinomio (in ordine decrescente) determinati con la funzione `polyfit`. Il vettore **x** contiene i valori dei punti in cui si intende valutare il polinomio.

Esempio:

```
xval = [1 2 3];
yval = polyval(p,xval);
```

Caricare i dati in MATLAB

- In molti casi, è utile caricare i dati in MATLAB direttamente da file di input (file di testo), evitando di inserirli come visto precedentemente.
- Modalità 1. Carico due file distinti, ciascuno dei quali con i dati relativi ai vettori **x** e **y**:

```
>> xx = load('puntix.txt');
>> yy = load('puntiy.txt');
```

- Modalità 2. Carico un unico file e successivamente associo i vettori **x** e **y** ai dati caricati:

```
>> DD = load('punti.txt');
>> xx = DD(:,1);
>> yy = DD(:,2);
```

ESERCIZI

1. Dati i seguenti punti:

x_i	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
$f(x_i)$	102.56	120.84	131.23	142.00	168.95	196.12	225.00	259.47	293.29	342.71

   Trovare la retta di approssimazione che minimizza gli scarti verticali, la curva di approssimazione $y = ae^{bx}$ e la curva di approssimazione $y = ax^b$

2. Di una funzione incognita $f(x)$ si conoscono le seguenti informazioni:

x_i	1	2	2.5	4
$f(x_i)$	2	2.5	3.8	5

   (a) Determinare il polinomio $P(x)$ che interpola i dati assegnati. (b) Costruire la retta di approssimazione $r(x)$ che minimizza gli scarti verticali. (c) Disegnare in uno stesso grafico i punti della tabella, il polinomio $P(x)$ e la retta $r(x)$.

ESERCIZI

3. Determinare il polinomio di terzo grado che interpola i seguenti valori della funzione: $f(0) = 3$, $f(1) = -3$, $f(2) = 1$ e $f(3) = 33$. Stimare $f(0.5)$ e $f'(0.5)$.
4. Si interpoli la funzione di Runge $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nell'intervallo $[-5, 5]$ partendo da 3 punti equidistanti nell'intervallo. Successivamente costruire i polinomi di interpolazione con grado $n =$ 4,6,8,12 e nodi equidistanti. Disegnare nello stesso grafico la funzione f e i polinomi interpolatori. Commentare il risultato ottenuto.